

2012年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～ケに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $(x - 2y)^8$ の展開式における x^5y^3 の係数は ア である。

(ii) $\int_0^2 (x^2 - ax + 2) dx = 0$ の等式を満たす定数 a の値は イ である。

(iii) 1 から 200 までの整数で、3 および 7 のいずれでも割りきれない数の個数は ウ 個である。

(iv) 方程式 $5x + 3y + z = 15$ を満たす自然数 x, y, z の組の個数は エ 個である。

(v) 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。点 P は、サイコロを振って偶数の目が出るとその目の数に $+3$ をかけた数だけ移動し、奇数の目が出るとその目の数に -2 をかけた数だけ移動する。このサイコロを 1 回振るときの点 P の数直線上の位置の期待値は オ である。

(vi) $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$ とおく。 $\log_4 150$ を a, b を用いて表すと カ である。

(vii) 複素数 z が $z = \frac{a}{1 - 3i} + \frac{bi}{1 + 3i}$ で与えられたとき、 $z = 4i$ となるような実数 a, b を求めると、 $a =$ キ , $b =$ ク である。ただし、 i は虚数単位とする。

(viii) O を原点とする座標平面上に長さが等しいベクトル $\overrightarrow{OP} = (2, 6)$ と $\overrightarrow{OQ}$ がある。
 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が $\frac{\pi}{3}$ であるとき、点 Q の x 座標は ケ である。ただし、点 Q の x 座標は 2 より小さいとする。

Ⅱ. k は自然数とし、数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \sqrt{2}, (2a_n + k)a_{n+1} = ka_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。このとき、次の問(i)～(iii)に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) a_3 を k を用いて表せ。

(ii) $a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる k を求めよ。

(iii) (ii)で求めた k について、 a_5 と a_{2012} を求めよ。

Ⅲ. a は $a > \frac{1}{2}$ を満たす定数とする. 座標平面上の半径 R の円 $C_1: x^2 + (y - a)^2 = R^2$

は, $y > 0$ の表す領域にある. 円 C_1 が放物線 $y = x^2$ と共有する点は 2 点のみである.

このとき, 次の問(i)～(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 共有点の y 座標および a を, R を用いて表せ.

(ii) 円 C_1 と放物線 $y = x^2$ の共有点における放物線の 2 つの接線のうち傾きが正のも

のを l とする. l の式を R を用いて表せ.

(iii) 点 $(0, -a)$ を中心とする半径 r の円 C_2 が直線 l と接するとき, r を R を

用いて表せ.

【以下余白】

