

I 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～サに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$, $y = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ のとき, $x^3 + y^3$ の値は ア である。

(ii) 互いに異なる定数 a, b, c が $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ を満たすとき,
 $\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ のとる値は イ である。ただし, $abc \neq 0$ とする。

(iii) 白玉3個と黒玉3個が入っている袋から玉を1個取り出し、色を調べてもとに戻す。

この試行を3回繰り返すとき、白玉を2回取り出す確率は ウ である。

(iv) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが -2 , $x-2$ で割った余りが 3 , $x-3$ で割った余りが 8 ならば, $P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは エ である。

(v) 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = -7$ と漸化式 $2a_{n+1} = 3a_n + 8$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められている。この数列の一般項は $a_n =$ オ である。

(vi) 平行四辺形 ABCD において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を E、辺 BC の中点を F、辺 CD の中点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を H とすると、

$$\overrightarrow{AH} = \text{ カ } \overrightarrow{AB} + \text{ キ } \overrightarrow{AD} \text{ となる。}$$

(vii) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 6$ がすべての実数 x に対して $f(x) > 0$ を満たすならば、定数 a の値の取りうる範囲は、ク $< a <$ ケ となる。

(viii) 関数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ が $f(1) = -6$ と $\int_0^3 \{f'(x)\}^2 dx = 63$ を満たすならば、定数 a, b の値は $a =$ コ, $b =$ サ である。ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。

Ⅱ. 関数 $f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 3$ が定める座標平面上の曲線を C とする. この曲線が y 軸と交わる点を P とし, $f(x)$ は $x = a$ において極小値をとるとする. $x = a$ に対応する曲線上の点を $Q(a, f(a))$ とする. このとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 点 Q の座標を求めよ.

(ii) 点 R を $R(0, f(a))$ で定める. $\triangle PQR$ を y 軸を中心にして回転させて得られる円錐 M とそれに内接する円柱 N を考える. 円柱 N の底面は, 円錐 M の底面に含まれており, 半径が r であるとき, この円柱 N の体積 V を r の式で表せ.

(iii) 円柱 N の体積 V が最大となるような r とそのときの体積を求めよ.

Ⅲ. 座標平面上に円 $x^2 + y^2 = 4$ と円上の点 $P(1, -\sqrt{3})$, $Q(-1, -\sqrt{3})$ が与えられている. $0 < \theta < \pi$ のとき, 円上の点を $R(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ とし, $\angle QPR = \alpha$, $\angle PQR = \beta$ とする. このとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 点 $(2, 0)$ を A , 点 $(-2, 0)$ を B とするとき, 弧 PAR に対する中心角と弧 QBR に対する中心角を θ を用いて表せ.

(ii) α, β を θ を用いて表せ.

(iii) $2 \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \beta$ となるとき, 点 R の座標を求めよ.