

2012年度

C 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～ケに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $\sqrt{2} \div \sqrt[4]{4} \times \sqrt[12]{32} \div \sqrt[5]{2} = 2^a$ とすると $a =$ である。

(ii) 座標空間に4点 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 2, 1)$, $B(1, 3, 5)$, $C(x, y, z)$ がある。ベクトル $\overrightarrow{OC}$ は、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ およびベクトル $\overrightarrow{OB}$ と垂直である。このとき、
 $(x, y, z) =$ である。ただし、 $x > 0$, $|\overrightarrow{OC}| = 1$ とする。

(iii) i を虚数単位として、複素数 $x = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$ を考える。 x と共役な複素数を $\bar{x}$ とするとき、 $x^3 + \bar{x}^3$ の値は である。

(iv) $\log_2 x + \log_4 y = 1$ のとき、 $x^2 + y$ の最小値は である。

(v) 4つの数字0, 1, 2, 6から、18で割り切れる4桁の数を作るとすると 通りできる。ただし、同じ数字は2度以上使わないものとする。

(vi) $\cos 75^\circ$ の値は である。

(vii) $\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数は である。

(viii) 三角形ABCの外心をOとする。 $\angle OAC = 40^\circ$, $\angle OCB = 25^\circ$ のとき、
 $\angle AOC =$ であり、 $\angle ABO =$ である。

Ⅱ. 数列 $\{a_k\}$ は, すべての自然数 n に対して,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3}{8} - \frac{3^n}{n+2}$$

を満たす. このとき, 次の問 (i) ~ (iii) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 初項 a_1 を求めよ.

(ii) $k \geq 2$ のとき, a_k を k の式で表せ.

(iii) 数列 $\{b_k\}$ を, すべての自然数 k に対して, $b_k = \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}} a_k$ により定めるとき, $\sum_{k=1}^n b_k$ を n の式で表せ.

Ⅲ. 座標平面上に点 $P(s, t)$ がある. ただし, $t < 0$ である. 点 P から放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ に引いた 2 本の異なる接線の接点を A, B とする. このとき, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ.
解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とするとき, $\alpha + \beta$ を s を用いて表せ.

ただし, $\alpha < \beta$ とする.

(ii) 2 点 A, B を通る直線 l の式を s と t を用いて表せ.

(iii) 直線 l と放物線 C で囲まれる部分の面積を S とするとき, S を s と t を用いて表せ.

(iv) 点 P が点 $(0, -3)$ を中心とする半径 2 の円周上にあるとき, S の最大値, および最大値を与える点 P の座標をすべて求めよ.

【以下余白】

