

1.

【解答】

- (i) ア 真
 イ 真
(ii) ウ 3
 エ $\frac{-5-\sqrt{3}i}{2}$
 オ $\frac{-5+\sqrt{3}i}{2}$
(iii) カ $\frac{2}{3}\pi$
(iv) キ $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1+\sqrt{2}$
(v) ク $0 < x < \sqrt{3}$
(vi) ケ 280
(vii) コ $-\frac{2}{5}$
 サ 2
(viii) シ $\frac{10^x-1}{9}$

【解説】

(i)
この命題の逆は、「 n^2 が偶数ならば n は偶数である」となる。ある自然数 k を用いて、
$$n^2 = 2k$$
とすると、 n と n をかけると偶数になることがわかるので、 n も偶数となる。よって、逆は真である。また、対偶は、命題の真偽と一致するので、命題において、
$$n = 2k$$
$$\Leftrightarrow n^2 = 2 \cdot (2k^2)$$
となり、命題は真である。よって、対偶も真である。

(ii)
$$x^3 + 2x^2 - 8x - 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 5x + 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3, \frac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$
となる。

(iii)
 $(2x + \cos \theta)^3$ を展開した一般項は、
$${}_3C_m (2x)^m (\cos \theta)^{3-m} \quad (m = 1, 2, 3)$$
となるので、 x^2 の係数は、 $m = 2$ のときで、
$${}_3C_2 \times 2^2 \times \cos \theta = -6$$
$$\Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$$
となる。

(iv)
 $x^2 - 2(k+1) + 2k^2 = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は、
$$\frac{D}{4} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (k+1)^2 - 2k^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$$
である。

(v)
真数条件より、
$$-1 < x < 2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
である。また、
$$-1 + 2\log_2(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$$
$$\Leftrightarrow -1 + 2\log_2(x+1) > \frac{\log_2(2-x)}{\log_2 \frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(2-x) > 2$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x < 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3) < 0$$
$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
となる。よって、①、②より、求める x の値の範囲は、
$$0 < x < \sqrt{3}$$
である。

(vi)
自転車の速さを分速 $x(m)$ とすると、
$$80 \times 30 + x \times 10 = 130 \times 40$$
$$\Leftrightarrow x = 280$$
である。

(vii)
まず、
$$|a| = |\overline{b}|$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
となる。また、
$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x-2y-1}{\sqrt{6} \sqrt{x^2+y^2+1}}$$
となるので、①を代入すると、
$$x = 2y + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
となる。②を①に代入すると、
$$5y^2 + 16y + 11 = 0$$
$$\Leftrightarrow (5y+11)(y+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{11}{5}, -1$$
となり、②に代入すると、
$$x = -\frac{2}{5}, 2$$
となる。

(viii)
この数列の一般項は、
$$\sum_{k=1}^n 10^{k-1}$$
$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$
$$= \frac{10^n - 1}{9}$$
となる。

II.

$$p(m, n) = {}_n C_m \cdot a^m \cdot (1-a)^{n-m} \quad \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。

(i)

①より,

$$\begin{aligned} p(1, 3) &= {}_3 C_1 \cdot a \cdot (1-a)^2 \\ &= 3(a^3 - 2a^2 + a) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3(a^3 - 2a^2 + a)$$

(ii)

①より,

$$\begin{aligned} p(7, 9) &= {}_9 C_7 \cdot a^7 \cdot (1-a)^2 \\ &= 36(a^9 - 2a^8 + a^7) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 36(a^9 - 2a^8 + a^7)$$

(iii)

①より,

$$\begin{aligned} p(x-1, y) &= p(x, y) \\ \Leftrightarrow {}_y C_{x-1} \cdot a^{x-1} \cdot (1-a)^{y-x+1} &= {}_y C_x \cdot a^x \cdot (1-a)^{y-x} \\ \Leftrightarrow \frac{y!}{(x-1)!(y-x+1)!} (1-a) &= \frac{y!}{x!(y-x)!} a \\ \Leftrightarrow \frac{1-a}{y-x+1} &= \frac{a}{x} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{x}{y+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{x}{y+1}$$

Ⅲ.

(i)

$f(x) = ax^2 + 1$ とすると,

$$f'(x) = 2ax$$

となるので, 直線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ &= 2apx - ap^2 + 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2apx - ap^2 + 1$$

(ii)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \{ax^2 + 1 - (2apx - ap^2 + 1)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 - apx^2 + ap^2x \right]_0^p \\ &= \frac{ap^3}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{ap^3}{3}$$

(iii)

$$l: -2apx + y + ap^2 - 1 = 0$$

であるので, 原点との距離が1であることより,

$$\begin{aligned} \frac{|ap^2 - 1|}{\sqrt{4a^2p^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2p^4 - 2ap^2 + 1 &= 4a^2p^2 + 1 \\ \Leftrightarrow ap^4 - 2(1+2a)p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{2(1+2a)}{a} \\ \Leftrightarrow p &= \sqrt{\frac{2(1+2a)}{a}} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

となる。これを(ii)の結果に代入すると,

$$S = \frac{4a+2}{3} \sqrt{\frac{4a+2}{a}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{4a+2}{3} \sqrt{\frac{4a+2}{a}}$$