

I

[解答]

ア -2 イ $\frac{4}{15}$ ウ $2\sqrt{5}$ エ $\frac{11\sqrt{7}}{2}$

オ (12, 4), (6, 6) カ $3\sqrt{5}$ キ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ク $x-5$

ケ (-3, 2, 4)

[解説]

(i)

$\{a_n\}$ の初項を a 、公比を d とおくと初項から第 n 項までの和は $na + \frac{1}{2}d \cdot n(n-1)$ と表せるから、 $\{a_n\}$ について、
 $10a + 45d = -8$
 $21a + 210d = 14$

である。これを解いて $a = -2$ 、 $d = \frac{4}{15}$ となる。

(ii)

$$\begin{aligned} & 2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8 \\ &= \log_3 4^2 + \frac{\log_3 5}{\log_3 9} - \log_3 8 \\ &= \log_3 \left(4^2 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{8} \right) \\ &= \log_3 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから $x = 2\sqrt{5}$ である。

(iii)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \\ &= \sqrt{7} \cdot \frac{11}{2} \\ &= \frac{11\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(iv)

$x \geq y > 0$ より $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ であるから、

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$$

であるため、

$$y \leq 6$$

となる。また $\frac{1}{3} > \frac{1}{y}$ より $y > 3$ であるから y は 4, 5, 6 のいずれかである。

$y = 4$ のとき $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$ であるから $x = 12$ であり、これは自然数かつ $x \geq y$ を満たす。

$y = 5$ のとき $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{5}$ であるから $x = \frac{15}{2}$ であり、これは自然数でないので不適。

$y = 6$ のとき $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}$ であるから $x = 6$ であり、これは自然数かつ $x \geq y$ を満たす。

以上より求める (x, y) の組は (12, 4), (6, 6) である。

(v)

解と係数の関係から、

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \frac{k}{5} \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{k^2}{25} - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

であり、 $k > 0$ であることから、 $k = 3\sqrt{5}$ である。

(vi)

正弦定理より、

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\frac{\sin A}{\sqrt{2}} = \frac{\sin B}{2} = \frac{\sin C}{1+\sqrt{3}} = k$ とおくと、

$$\sin A = \sqrt{2}k, \sin B = 2k, \sin C = (1+\sqrt{3})k$$

であるからこれを①に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}k}{BC} &= \frac{2k}{AC} = \frac{(1+\sqrt{3})k}{AB} \\ \therefore BC : AC : AB &= \sqrt{2} : 2 : 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} \\ &= \frac{4 + 2 - (1 + \sqrt{3})^2}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

(vii)

$P(x)$ は x の整式 $Q(x)$, $R(x)$ を用いて、

$$P(x) = (2x^2 + 9x - 5)Q(x) + 3x + 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P(x) = (x - 2)R(x) - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $P(x)$ を $x^2 + 3x - 10$ で割った余りを $ax + b$ とおくと、整式 $S(x)$ を用いて

$$P(x) = (x^2 + 3x - 10)S(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。①より、 $P(-5) = 0 \cdot Q(-5) - 10 = -10$ であるから、③より

$$-5a + b = -10 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。②より、 $P(2) = 0 \cdot R(2) - 3 = -3$ であるから、③より

$$2a + b = -3 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④⑤を連立して解いて $a = 1$, $b = -5$ である。よって、求める余りは $x - 5$ となる。

(viii)

$AB = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{13}$ より、四点 ABCD を頂点とする四角形のうちひし形になりうるのは四角形 ACBD のみである。対角線 AB, CD のそれぞれの中点が一致すればよいので、

$$\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+1}{2} \right)$$

であればよい。よって $x = -3$, $y = 2$, $z = 4$ である。よって、D の座標は (-3, 2, 4) である。

II

(i)

放物線 C の式を微分して

$$y' = 2x + 2 - a$$

であるから、点 $(-1, 2)$ における接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -a(x+1) + 2 \\ &= -ax + 2 - a \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -ax + 2 - a$$

(ii)

$a=0$ とすると l の式は $y=2$ となるから x 軸と交わらないから不適。よって $a \neq 0$ である。

直線 l の x 切片、 y 切片がともに正であれば良いから、

$$2 - a > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

かつ

$$\frac{2}{a} - 1 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

であればよい。①より $a < 2$ である。②について、 $a > 0$ のとき②を解いて $a < 2$ である。よって $0 < a < 2$ である。 $a < 0$ のとき②を解いて $a > 2$ である。これを満たす実数 a は存在しない。すなわち②を解くと

$$0 < a < 2$$

である。①②の共通範囲を求めて

$$0 < a < 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < a < 2$$

(iii)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(2-a) \left(\frac{2}{a} - 1 \right) \\ &= \frac{(2-a)^2}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^0 \{x^2 + (2-a)x + 3 - a - (-ax + 2 - a)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= 3S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{(2-a)^2}{2a} &= 3 \cdot \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow a^2 - 6a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。このうち $0 < a < 2$ を満たすのは $a = 3 - \sqrt{5}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = 3 - \sqrt{5}$$

Ⅲ

(i)

縦向きの距離6の二本の線分は2組とれる。横向きも同様に2組取れるから、正方形の個数は

$$2 \times 2 = 4 \text{ 個}$$

である。

(答) 4 個

(ii)

縦向きの距離5の二本の線分は3組とれる。横向きでも同様に3組取れるから、正方形の個数は

$$3 \times 3 = 9 \text{ 個}$$

である。

(答) 9 個

(iii)

一辺の長さが n の正方形は(i)(ii)と同様の考え方から、

$$(8-n)^2 \text{ 個}$$

存在する。すべての正方形の個数を考えるとき $n=1, 2, \dots, 7$ で個数の和をとればよいので、よって、

$$1+4+9+16+25+36+49=140 \text{ 個}$$

の正方形が存在する。

(答) 140 個

(iv)

縦向きの線分二本の選び方は、

$${}_8C_2 = 28 \text{ 通り}$$

存在する。横向きでも同様に ${}_8C_2 = 28$ 通り存在するから、

すべての長方形の個数は

$$28 \times 28 = 784 \text{ 個}$$

である。正方形でない長方形の数は(iii)で求めた正方形の個数を引けば良いから、求める個数は

$$784 - 140 = 644 \text{ 個}$$

である。

(答) 644 個

(v)

点Aを含む長方形の個数を求める。縦横一本ずつの点Aを通る線分は固定して考えると、もう一本の線分の選び方は縦横ともに7通り存在するから、すべての長方形の個数は

$$7 \times 7 = 49 \text{ 個}$$

存在する。点Aを含む正方形は7個存在するから、点Aを含む長方形のうち正方形でないものの個数は

$$49 - 7 = 42 \text{ 通り}$$

存在する。よって求める長方形の個数は

$$644 - 42 = 602 \text{ 個}$$

である。

(答) 602 個