

I

(i) ア $x < -4$ (ii) イ $a = 2$ (iii) ウ $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

(iv) エ $81^{\frac{1}{3}}$ (v) オ $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (vi) カ $\frac{2}{5}$ キ $\frac{3}{5}$

(vii) ク $\frac{n(n-1)}{6}$ (viii) ケ $\frac{1}{3}$

【解説】

(i)

x の範囲によって場合分けして考える。

[1] $x \leq -2$ のとき

このとき与えられた不等式は

$$x(-x-2) < 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) > 0$$

$$\therefore x > 0 \text{ または } x < -4$$

となる。したがって $x \leq -2$ とあわせると

$$x < -4$$

となる。

[2] $x > -2$ のとき

このとき与えられた不等式は

$$x(x+2) < 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 0$$

となるが、これを満たす実数 x は存在しない。

以上[1], [2]より与えられた不等式の解は

$$x < -4$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+ai} &= \frac{(3+i)(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)} \\ &= \frac{3+a}{1+a^2} + \frac{1-3a}{1+a^2}i\end{aligned}$$

となる。したがって a が実数であることより、与えられた複素数の実部と虚部はそれぞれ

$$\frac{3+a}{1+a^2}, \frac{1-3a}{1+a^2}$$

である。したがってこれらの和が 0 であるとき

$$\frac{3+a}{1+a^2} + \frac{1-3a}{1+a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3+a+1-3a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

となる。

(iii)

円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ における円の接線の方程式は

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。この直線が点 $(2, 1)$ を通るとき

$$2\cos \theta + \sin \theta = 1$$

$$\therefore \sin \theta = 1 - 2\cos \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって

$$\cos^2 \theta + (1 - 2\cos \theta)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}, 0$$

となる。 $\cos \theta = 0$ のとき②より $\sin \theta = 1$ である。よって接線の方程式は①より

$$y = 1$$

となる。 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき②より $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ である。よって接線の方程式は①より

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

となる。

(iv)

$$128^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}, 8^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$$

であり $\frac{6}{5} > \frac{7}{6}$ であるので

$$2^{\frac{7}{8}} < 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\therefore 128^{\frac{1}{8}} < 8^{\frac{2}{5}}$$

となる。一方

$$\left(8^{\frac{2}{5}} \right)^5 = 64, \left(81^{\frac{1}{3}} \right)^5 = 81$$

であるので

$$\left(8^{\frac{2}{5}} \right)^5 < \left(81^{\frac{1}{3}} \right)^5$$

$$\therefore 8^{\frac{2}{5}} < 81^{\frac{1}{3}}$$

となる。したがって 3 つの数のうち最大のものは $81^{\frac{1}{3}}$ である。

(v)

加法定理より

$$\begin{aligned}\cos 165^\circ &= \cos(120^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

となる。

(vi)

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{q}$ とおく。与えられた等式より

$$\overrightarrow{p} + 2(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) + 3(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{p} = \frac{2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{6}$$

となる。一方点 Q は直線 OP 上の点であるので実数 k が存在して

$$\overrightarrow{q} = k\overrightarrow{p} = \frac{2k\overrightarrow{a} + 3k\overrightarrow{b}}{6}$$

とおける。ここで点 Q が線分 AB 上にあるので

$$\frac{2k}{6} + \frac{3k}{6} = 1$$

$$\therefore k = \frac{6}{5}$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{q} = \frac{2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{5}$$

となる。

(vii)

与えられた漸化式より

$$a_{k+1} + 1 = 2(a_k + 1)$$

となる。また $a_1 + 1 = 1$ であるので

$$a_k + 1 = 2^{k-1}$$

$$\therefore a_k = 2^{k-1} - 1$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\log_8(1+a_k) &= \frac{\log_2(1+a_k)}{\log_2 8} \\ &= \frac{1}{3} \log_2(1+a_k) \\ &= \frac{k-1}{3}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \log_8(1+a_k) &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= \frac{n(n-1)}{6}\end{aligned}$$

となる。

(viii)

カードの並べ方の総数は $6!$ 通りである。数字の 2 が書かれたカード 2 枚を 1 つのカードとし

て 5 枚のカードの並び方を考えると、並べ方は $5!$ 通りである。そのそれぞれに対し 2 枚の

2 が書かれたカードの並べ方が 2 通りあるので求める確率は

$$\frac{5! \times 2}{6!} = \frac{1}{3}$$

となる。

II

(i)

$x \leq 1$ のとき、求める交点は原点とは異なるので、

$$\begin{aligned}x^2 &= kx \\ x(x-k) &= 0 \\ x &= k\end{aligned}$$

である。 $0 < k < 1$ より $x \leq 1$ を満たす。 $x > 1$ のとき、求める交点は原点とは異なるので、

$$\begin{aligned}-x^2 + 2x &= kx \\ x\{x-(2-k)\} &= 0 \\ x &= 2-k\end{aligned}$$

である。 $0 < k < 1$ より $x > 1$ を満たす。したがって、求める交点は、

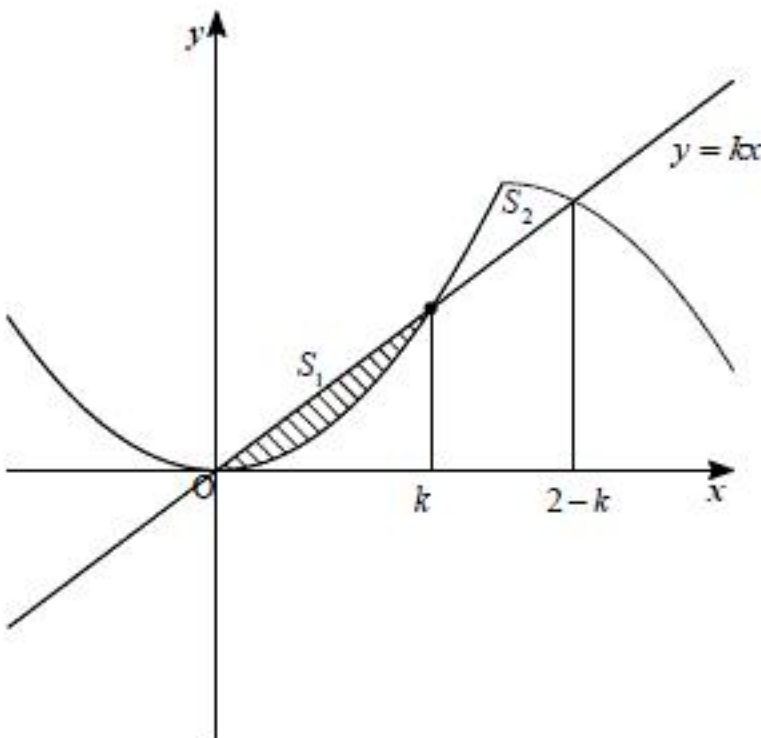
$$(k, k^2), (2-k, k(2-k))$$

である。

(答) $(k, k^2), (2-k, k(2-k))$

(ii)

$y = F(x)$, $y = kx$ のグラフは下の図のようになる。



グラフより、 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^k (kx - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^k \\ &= \frac{k^3}{6}\end{aligned}$$

である。

(答) $S_1 = \frac{k^3}{6}$

(iii)

グラフより、 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_1^{2-k} (-x^2 + 2x - kx) dx + \int_k^1 (x^2 - kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + (2-k) \frac{x^2}{2} \right]_1^{2-k} + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} kx^2 \right]_k^1 \\ &= (1-k)^2\end{aligned}$$

である。

(答) $S_2 = (1-k)^2$

(iv)

$S = S_1 + S_2$ であるから、

$$S = \frac{1}{6} k^3 + (1-k)^2$$

である。 $S = S(k)$ として、 k で微分すると、

$$S'(k) = \frac{1}{2} (k^2 + 4k - 4)$$

である。

$$\begin{aligned}k^2 + 4k - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -2 \pm 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

より増減表は下のようになる。

k	0	...	$-2+2\sqrt{2}$	...	1
$S'(k)$	-	-	0	+	+
$S(k)$		↘		↗	

よって、最小値をとるときの k の値は、 $k = -2 + 2\sqrt{2}$ である。

(答) $k = -2 + 2\sqrt{2}$

III

(i)

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -y \end{pmatrix}, \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -x \\ 2-y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (2-x) \cdot (-x) + (-y) \cdot (2-y) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$$

(ii)

PA の長さが $\sqrt{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}|^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

である。(i)の答えと合わせて、整理すると、

$$-x + y = -1$$

となる。これを $(2-x)^2 + y^2 = 2$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、求める答えは、

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \text{ または } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \text{ または } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$$

(iii)

点Pは(i)より、 $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$ 上を動く。 $y=1$ のとき、 $x=1 \pm \sqrt{2}$ であるが、 $x>0$ より、 $x=1+\sqrt{2}$ である。線分ABの中点の座標Mは(1,1)だから、線分PMはx軸に平行である。

したがって、 $\overrightarrow{MA}$ とx軸の間の角を求めればよい。

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $\angle AMP = 45^\circ$ である。

$$(\text{答}) \quad \angle AMP = 45^\circ$$