

【

[解答]

ア $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ イ $2+\sqrt{3}$ ウ $2\sqrt{10}$ エ 4

オ, カ, キ, ク $\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (順不同) ケ $(3, 1, 1)$ コ $-22 < x < 28$ サ $2\overline{BC} - \overline{AB}$

[解説]

(i)

余弦定理より,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ \\ &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

であるから $BC > 0$ より $BC = \sqrt{13}$ である。線分 AD は角 A の二等分線であるから,

$$BD : DC = AB : AC = 4 : 3$$

である。よって $BD = \frac{4}{7}\sqrt{13}$, $CD = \frac{3}{7}\sqrt{13}$ である。 $AD = x$ とおくと, $\triangle ABD$ について余弦定理から,

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{208}{49} \\ \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{3}x + \frac{576}{49} &= 0 \end{aligned}$$

である。また $\triangle ACD$ について余弦定理から,

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{117}{49} \\ \Leftrightarrow x^2 - 3\sqrt{3}x + \frac{324}{49} &= 0 \end{aligned}$$

である。以上二式を連立して解くと, $x = \frac{12\sqrt{3}}{7}$ となる。

(ii)

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(iii)

$$(5^x - 5^{-x})^2 = 25^x + 25^{-x} - 2 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} 25^x + 25^{-x} &= (5^x - 5^{-x})^2 + 2 \\ &= 6^2 + 2 \\ &= 38 \end{aligned}$$

であるから

$$(5^x + 5^{-x})^2 = 25^x + 25^{-x} + 2 = 40$$

である。 $5^x + 5^{-x} > 0$ より

$$5^x + 5^{-x} = 2\sqrt{10}$$

である。

(iv)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n} - \sqrt{n+2})} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{79}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{81}-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

(v)

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3)(2x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$x = \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

である。

(vi)

PA = PB より $PA^2 = PB^2$ であるから,

$$(x+6)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2$$

である。両辺整理すると,

$$2x + 3y + 5z = 14$$

となる。ここで $x, y, z > 0$ であるから, $5z < 14$ でなければならないので, $z = 1, 2$ のいずれかである。 $z = 1$ とすると $2x + 3y = 9$ であるから, x, y が正の整数となる $x = 3, y = 1$ があてはまる。 $z = 2$ とすると $2x + 3y = 4$ であるから, これを満たす正の整数 x, y は存在しない。よって $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ である。

(vii)

[1] $x \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} &< 5 \\ \Leftrightarrow x-3 &< 25 \\ \Leftrightarrow x &< 28 \end{aligned}$$

である。 $x \geq 3$ との共通範囲を求めて $3 \leq x < 28$ である。

[2] $x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &< 5 \\ \Leftrightarrow 3-x &< 25 \\ \Leftrightarrow x &> -22 \end{aligned}$$

である。 $x < 3$ との共通範囲を求めて $-22 < x < 3$ である。

[1][2]より求める範囲は

$$-22 < x < 28$$

である。

(viii)

$\overline{AF} = \overline{BC} - \overline{AB}$ であるから

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{AF} + \overline{FE} \\ &= \overline{BC} - \overline{AB} + \overline{BC} \\ &= 2\overline{BC} - \overline{AB} \end{aligned}$$

である。

II

(i)

一回の試行において、どの点も $\frac{1}{9}$ の確率で選ばれるから、三回とも原点を選ぶ確率は

$$\left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729}$$

である。

(答) $\frac{1}{729}$

(ii)

原点以外の 8 点についても (i) の原点同様の議論が当てはまるから、求める確率は、

$$\frac{1}{729} \times 9 = \frac{1}{81}$$

である。

(答) $\frac{1}{81}$

(iii)

二回選ぶ点の選び方は 9 通りであり、一回だけ選ぶ点の選び方は二回選ぶ点以外の点から選ぶから 8 通り存在する。よって点の選び方は

$$9 \times 8 = 72 \text{ 通り}$$

存在する。またそれぞれの選び方について、その確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{243}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{1}{243} \times 72 = \frac{8}{27}$$

である。

(答) $\frac{8}{27}$

(iv)

[1] x 軸に平行な直線

$y = 0, 1, 2$ の 3 通りが考えられる。各直線上に三点が配置される確率は、

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{243}$$

である。

[2] y 軸に平行な直線

$x = 0, 1, 2$ の 3 通りが考えられる。各直線上に三点が配置される確率は、[1] 同様

$$\frac{2}{243} \text{ である。}$$

[3] $y = x, y = -x + 2$ のとき

各直線上に三点が配置される確率は、[1] 同様 $\frac{2}{243}$ である。

以上から求める確率は

$$\frac{2}{243} \times 8 = \frac{16}{243}$$

である。

(答) $\frac{16}{243}$

(v)

3 点を頂点とする三角形ができる条件は、3 点はいずれも異なり、かつ一直線上に並ばないことである。3 点とも異なる確率を考えると、1 点目の選び方は 9 通り、2 点目の選び方は 8 通り、3 点目の選び方は 7 通りあるから、その確率は

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{9^3} = \frac{56}{81}$$

である。これから 3 点が異なり、かつ同一直線上に並ぶ確率を引いて、求める確率は

$$\frac{56}{81} - \frac{16}{243} = \frac{152}{243}$$

となる。

(答) $\frac{152}{243}$

Ⅲ

(i)

曲線 C について $y' = 2x$ であるから、 l の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 2t(x-t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2\end{aligned}$$

である。

(答) $y = 2tx - t^2$

(ii)

直線 l と x 軸との交点は、

$$\begin{aligned}0 &= 2tx - t^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t}{2}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^t x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t \cdot t^2 \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t - \frac{1}{4} t^3 \\ &= \frac{1}{12} t^3\end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{1}{12} t^3$

(iii)

直線 l と直線 m は直交するから、 m の傾きは $-\frac{1}{2t}$ である。よって直線 m の方程式は

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 \\ &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$

(iv)

$$\begin{aligned}T &= \int_0^t \left(-\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} - x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4t}x^2 + \left(t^2 + \frac{1}{2} \right)x \right]_0^t \\ &= \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t\end{aligned}$$

である。

(答) $T = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t$

(v)

$$\begin{aligned}S : T &= 1 : 9 \\ \Leftrightarrow T &= 9S \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t &= 9 \cdot \frac{1}{12}t^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{12}t(t^2 - 3) &= 0\end{aligned}$$

である。 $t > 0$ であるから、

$$t = \sqrt{3}$$

となる。よって、点 P の座標は、 $(\sqrt{3}, 3)$ と求まる。

(答) $(\sqrt{3}, 3)$