

I

【解答】

ア	$-\frac{1}{2}$	イ	$\frac{3}{2}$
ウ	$\frac{\pi}{3}$	エ	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$
オ	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$	カ	333
キ	200	ク	534
ケ	$\frac{85}{4}$	コ	$2-\log_3 2$

【解説】

(i)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & pq \\ q & p+q^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 2A^2 - 3A + E &= O \\ \Leftrightarrow 2 \begin{pmatrix} p & pq \\ q & p+q^2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2p+1 & 2pq-3p \\ 2q-3 & 2q^2-3q+2p+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+1=0 \\ 2pq-3p=0 \\ 2q-3=0 \\ 2q^2-3q+2p+1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

となるので、上の連立方程式を解くと、

$$(p, q) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (p, q) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

(ii)

△ABC において余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} \\ &= \frac{24}{48} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。 $0 < \angle BAC < \pi$ であるから、

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

とわかる。また、

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、△ABC の外接円の半径を R とすると、△ABC において正弦定理より、

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin \angle BAC} \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(iii)

第 k 項の値を a_k とすると、

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{l=1}^{2k-1} l \\ &= \frac{1}{2}(2k-1)2k \\ &= 2k^2 - k \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) &= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1) \end{aligned}$$

と求まる。

(iv)

1001 から 2000 までの整数の中で 3 の倍数のものは、

$$1002, 1005, \dots, 1998$$

である。すなわち、

$$3 \times 334, 3 \times 335, \dots, 3 \times 666$$

となるから、

$$666 - 334 + 1 = 333 \quad [\text{個}]$$

ある。また、5 の倍数のものは、

$$1005, 1010, \dots, 2000$$

である。すなわち、

$$5 \times 201, 5 \times 202, \dots, 5 \times 400$$

となるから、

$$400 - 201 + 1 = 200 \quad [\text{個}]$$

ある。15 の倍数のものは、

$$1005, 1020, \dots, 1995$$

である。すなわち、

$$15 \times 67, 15 \times 68, \dots, 15 \times 133$$

となるから、

$$133 - 67 + 1 = 67 \quad [\text{個}]$$

ある。したがって、1001 から 200 までの整数の中に 3 の倍数でも 5 の倍数でも無いものは、

$$1000 - 333 - 200 + 67 = 534 \quad [\text{個}]$$

ある。

(v)

$3^x = X$ とすると、

$$X > 0$$

であり、

$$\begin{aligned} f(x) &= 9X - X^2 + 1 \\ &= -\left(X - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $f(x)$ は

$$X = \frac{9}{2} \text{ のとき、最大値 } \frac{85}{4}$$

をとる。

$$X = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{9}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \log_3 3^x &= \log_3 \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 - \log_3 2 \end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $f(x)$ は

$$x = 2 - \log_3 2 \text{ のとき、最大値 } \frac{85}{4}$$

とわかる。

II.

(i)

2つの放物線の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 2 &= ax^2 - x + a + 1 \\ \Leftrightarrow (a+1)x^2 - 4x + a - 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。2つの放物線が共有点を持つための条件は①が解を持つことである。①の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4 - (a+1)(a-1) \\ &= 5 - a^2 \end{aligned}$$

となる。したがって求める条件は、 a が正の定数であるという条件に注意すると、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \therefore 0 < a &\leq \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $0 < a \leq \sqrt{5}$

(ii)

①の2解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。このとき解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{4}{a+1}$$

$$\alpha\beta = \frac{a-1}{a+1}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{16}{(a+1)^2} - \frac{4(a-1)}{a+1} \\ &= \frac{4(5-a^2)}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって2つの共有点の x 座標の差が2であるための条件は

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{4(5-a^2)}{(a+1)^2} &= 4 \\ \Leftrightarrow 5 - a^2 &= (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a+2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって $0 < a \leq \sqrt{5}$ であることより

$$a = 1$$

となる。

(答) $a = 1$

(iii)

$a = 1$ のとき

$$ax^2 - x + a + 1 = x^2 - x + 2$$

である。放物線 $y = x^2 - x + 2$ と放物線 $y = -x^2 + 3x + 2$ の交点の x 座標は

$$x = 0, 2$$

である。また、

$$y = x^2 - x + 2 > 0 \quad (0 < x < 2)$$

であるから、放物線 $y = x^2 - x + 2$ と $x = 0, x = 2, x$ 軸が囲む領域を x 軸周りに回転して得られる立体の体積を V_1 、放物線 $y = -x^2 + 3x + 2$ と $x = 0, x = 2, x$ 軸が囲む領域を x 軸周りに回転して得られる立体の体積を V_2 とすると、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \int_0^2 \pi (-x^2 + 3x + 2)^2 dx - \int_0^2 \pi (x^2 - x + 2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 \{(-x^2 + 3x + 2 + x^2 - x + 2)(-x^2 + 3x + 2 - x^2 + x - 2)\} dx \\ &= \pi \int_0^2 (-4x^3 + 16x) dx \\ &= \pi [-x^4 + 8x^2]_0^2 \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) 16π

Ⅲ

(i)

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2-\sqrt{3}\cos x)\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x}{(2-\sqrt{3}\cos x)^2} \\ &= \frac{2\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(2-\sqrt{3}\cos x)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

よって $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

となる。

(答) 1

(ii)

$t = \cos x$ とおく。このとき $0 \leq x \leq \pi$ より $-1 \leq t \leq 1$ となる。このとき

$$f'(x) = \frac{2\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(2-\sqrt{3}t)^2}$$

となるので、これを $h(t)$ とおく。 $h(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{2(2-\sqrt{3}t)^2 - (2t-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})(2-\sqrt{3}t)}{(2-\sqrt{3}t)^4} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(2-\sqrt{3}t)^3} \end{aligned}$$

となる。したがって α を

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

を満たす $0 \leq \alpha \leq \pi$ の実数であるとする。 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標は α である。このとき

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。したがって $y = f(x)$ の変曲点の y 座標は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\sin \alpha}{2-\sqrt{3}\cos \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(iii)

$u = \cos x$ とく。このとき

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

x	0	→	π
u	1	→	-1

であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi f(x) dx \\ &= \int_1^{-1} \frac{-1}{2-\sqrt{3}u} du \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \log(2-\sqrt{3}u) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \log(2+\sqrt{3}) - \log(2-\sqrt{3}) \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3})$

IV

(i)

$|\overline{a}|=t$ とするとき,

$$\begin{aligned} |\overline{a}-\overline{b}|^2 &= |\overline{a}|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 \\ &= 2t^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= 1 \\ \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} &= t^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = t^2 - \frac{1}{2}$$

(ii)

(i)と同様に,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{c} \cdot \overline{a} = t^2 - \frac{1}{2}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} |\overline{a}-\overline{d}|^2 &= |2\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|^2 \\ &= 4|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 + |\overline{c}|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{b} \cdot \overline{c} + 4\overline{c} \cdot \overline{a} \\ &= 6t^2 + 10\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 16t^2 - 5 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$|\overline{a}-\overline{d}| = \sqrt{16t^2 - 5}$$

とわかる。

$$(答) \quad |\overline{a}-\overline{d}| = \sqrt{16t^2 - 5}$$

(iii)

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ は対称性があるので, (ii)より,

$$\begin{aligned} |\overline{a}-\overline{d}| &= |\overline{b}-\overline{d}| = |\overline{c}-\overline{d}| = \sqrt{16t^2 - 5} = 1 \\ 16t^2 - 5 &= 1 \\ \Leftrightarrow 16t^2 &= 6 \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{6}}{4} \quad (\because t \geq 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad t = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

(iv)

$t = \frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{c} \cdot \overline{a} = -\frac{1}{8}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \overline{p} \cdot \overline{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x\overline{a} + y\overline{b} + \overline{c}) \cdot \overline{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x|\overline{a}|^2 + y\overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{c} \cdot \overline{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8} &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} \overline{p} \cdot \overline{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x\overline{a} + y\overline{b} + \overline{c}) \cdot \overline{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\overline{a} \cdot \overline{b} + y|\overline{b}|^2 + \overline{b} \cdot \overline{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{1}{8} &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。これを解くと,

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(答) \quad x = y = \frac{1}{2}$$