

I.

(i) ア 108

(ii) イ 3
ウ -2

(iii) エ $-\frac{1}{27}$

(iv) オ 6
カ -3

(v) キ $3\sqrt{3}$
ク 3

(vi) ケ $\frac{1}{4}$

(vii) コ $\frac{3a+2b}{2a+2b+2}$

(viii) サ $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$

【解説】

(i)

8で割り切れる数は、

$$1000 \div 8 = 125 \text{ 個}$$

ある。また、8と14の最小公倍数は、56である。56で割り切れる数は、

$$1000 \div 56 = 17.9 \dots$$

となるので、17個である。よって、8で割り切れるが14では割り切れない数は、

$$125 - 17 = 108 \text{ 個}$$

ある。

(ii)

$$f'(x) = 2px + q$$

であるので、

$$f'(1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2p + q = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\int_0^2 f(x) dx = 6$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3} px^3 + \frac{1}{2} qx^2 + x \right]_0^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} p + 2q + 2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4p + 3q = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、①と②より、

$$\begin{cases} p = 3 \\ q = -2 \end{cases}$$

である。

(iii)

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{3}{\alpha\beta} \right\}$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$= \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{2}{3}$$

であるので、

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{27}$$

である。

(iv)

$$3x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x^2 + x - 2)(3x + a - 3) + (-a + b + 9)x + 2a - 12$$

となり、これが割り切れるので、

$$\begin{cases} -a + b + 9 = 0 \\ 2a - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -3 \end{cases}$$

である。

(v)

$$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

であるので、正弦定理より、

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow BC = 3\sqrt{3}$$

となり、外接円の半径を R とすると、

$$2R = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow R = 3$$

である。

(vi)

$$4\cos^2 \theta + 9\sin \theta = 6$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 \theta) + 9\sin \theta = 6$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 \theta - 9\sin \theta + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{4} \quad (\because \sin \theta \leq 1)$$

となる。

(vii)

$$\log_{60} 40$$

$$= \frac{\log_3 4 \times 5 \times 4^{\frac{1}{2}}}{\log_3 4 \times 5 \times 3}$$

$$= \frac{a + b + \frac{1}{2}a}{a + b + 1}$$

$$= \frac{3a + 2b}{2a + 2b + 2}$$

である。

(viii)

この数列の第 n 項の値は、

$$(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$$

となるので、初項から第 n 項までの和は、

$$\sum_{k=1}^n (4k^2 - 1)$$

$$= 4 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n$$

$$= \frac{1}{3} n(4n^2 + 6n - 1)$$

となる。

II.

(i)

直線 AC の傾きは,

$$\frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$$

であるので, その垂線の式は, 点 P を通ることより,

$$y = -2(x-p) + q$$

となり, 直線 AC の式は,

$$y = \frac{1}{2}x$$

となる。よって, 点 F の x 座標は, 2 式を連立すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x &= -2(x-p) + q \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4p+2q}{5}\end{aligned}$$

となるので, 点 F の座標は,

$$\left(\frac{4p+2q}{5}, \frac{2p+q}{5} \right)$$

である。

$$(答) \left(\frac{4p+2q}{5}, \frac{2p+q}{5} \right)$$

(ii)

$D(-2, q), E(p, 1)$ であるので,

$$\overrightarrow{DE} = (p+2, 1-q)$$

となる。よって,

$$\begin{cases} x_1 = p+2 \\ y_1 = 1-q \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{aligned} x_1 &= p+2 \\ y_1 &= 1-q \end{aligned}$$

(iii)

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{-p+2q}{5}, \frac{2p+q-5}{5} \right)$$

となるので,

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-p+2q}{5} \\ y_2 = \frac{2p+q-5}{5} \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{aligned} x_2 &= \frac{-p+2q}{5} \\ y_2 &= \frac{2p+q-5}{5} \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\ \Leftrightarrow (p+2) \cdot \frac{2p+q-5}{5} &= (1-q) \cdot \frac{-p+2q}{5} \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 &= 5 \end{aligned}$$

となる。よって, 点 P の軌跡の方程式は,

$$x^2 + y^2 = 5$$

である。

$$(答) x^2 + y^2 = 5$$

Ⅲ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 軸の正方向に1動く確率は } \frac{1}{2} \\ y \text{ 軸の正方向に1動く確率は } \frac{1}{3} \\ \text{動かない確率は } \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

である。

(i)

x 軸の正方向に1, y 軸の正方向に1動けばよいので, その確率は,

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(ii)

x 軸の正方向に2, y 軸の正方向に2動けばよいので, その確率は,

$${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$

(iii)

x 軸の正方向に2, y 軸の正方向に2動き, 2回動かなければよいので, その確率は,

$$\frac{6!}{2!2!2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}$$

となる。

(答) $\frac{5}{72}$

(iv)

2回試行を行って点Aが(0, 1)にあり, 3回目の試行で x 軸正方向に動く場合と, 2回試行を行って点Aが(1, 0)にあり, 3回目の試行で y 軸正方向に動く場合がある。よって, その確率は,

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) $\frac{1}{9}$

(v)

4回試行を行って点Aが(1, 2)にあり, 5回目の試行で x 軸正方向に動く場合と, 4回試行を行って点Aが(2, 1)にあり, 5回目の試行で y 軸正方向に動く場合がある。よって, その確率は,

$$\frac{4!}{2!} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) $\frac{1}{9}$