

2013年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～ケに当てはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 不等式 $x|x+2| < 2x$ の解は ア である。

(ii) a を実数とする。 $\frac{3+i}{1+ai}$ の実部と虚部の和が0であるとき、 $a =$ イ $$ である。

ただし、 i は虚数単位とする。

(iii) 座標平面上の点 $(2, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ へ引いた接線の方程式は $y = 1$ と $y =$ ウ $$ である。

(iv) $128^{\frac{1}{6}}, 8^{\frac{2}{5}}, 81^{\frac{1}{3}}$ のうち最大のものは エ である。

(v) $\cos 165^\circ$ の値は オ である。

(vi) 平面上に三角形OABと点Pがあり、 $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{0}$ を満たしている。直線ABと直線OPとの交点をQとすると、 $\overrightarrow{OQ} =$ カ $\overrightarrow{OA} +$ キ $\overrightarrow{OB}$ である。

(vii) 数列 $\{a_k\}$ は $a_1 = 0$ と漸化式 $a_{k+1} = 2a_k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) で定められている。このとき、 $\sum_{k=1}^n \log_8(1 + a_k) =$ ク $$ である。

(viii) 数字の1が書かれたカードが1枚、数字の2が書かれたカードが2枚、数字の3が書かれたカードが3枚ある。この6枚のカード全部を1列に並べるとき、数字の2が書かれたカードが連続して並ぶ確率は ケ である。

Ⅲ. 座標平面上に点 $A(2, 0)$, 点 $B(0, 2)$ があり, 点 $P(x, y)$ は $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ を満たしている. このとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 点 P の軌跡の方程式を求めよ.

(ii) 線分 PA の長さが $\sqrt{2}$ となるとき, 点 P の座標を求めよ.

(iii) 線分 AB の中点を M とする. 点 $P(x, y)$ について $x > 0, y = 1$ であるとき,

$\angle AMP$ を求めよ.

Ⅱ. 関数 $F(x)$ を次のように定める.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ -x^2 + 2x & (x > 1) \end{cases}$$

実数 k が $0 < k < 1$ を満たすとき, 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答は解答用紙の
所定欄に記入せよ.

(i) 直線 $y = kx$ と曲線 $y = F(x)$ の交点のうち, 原点とは異なるものをすべて求め
よ.

(ii) 直線 $y = kx$ と曲線 $y = F(x)$ で囲まれた2つの部分のうち, 直線 $y = kx$ の下
側にある部分の面積 S_1 を k を用いて表せ.

(iii) 直線 $y = kx$ と曲線 $y = F(x)$ で囲まれた2つの部分のうち, 直線 $y = kx$ の上
側にある部分の面積 S_2 を k を用いて表せ.

(iv) (ii)で求めた S_1 と(iii)で求めた S_2 の和 $S = S_1 + S_2$ が最小となるときの k の
値を求めよ.

【以下余白】

