2013年度

Ua 数 学 問 題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべてＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシルで記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は12ページまでとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

Ⅰ．下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

（ⅰ） $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする．行列 $A=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & q\end{pmatrix}$ が

$2A^2-3A+E=O$ を満たすとき，$p=$ [ア]，$q=$ [イ] である．

（ⅱ） 三角形ABCの3辺の長さがそれぞれ AB＝3，BC＝7，CA＝8 であるとき，

∠BAC＝ [ウ] であり，三角形ABCに外接する円の半径は [エ] である．

（ⅲ） 数列 1，1＋2＋3，1＋2＋3＋4＋5，1＋2＋3＋4＋5＋6＋7，… の初項から第 n 項までの和を n を用いて表すと [オ] となる．

（ⅳ） 1001から2000までの整数の中に3の倍数は [カ] 個あり，5の倍数は [キ] 個ある．また，3の倍数でも5の倍数でもないものは [ク] 個ある．

（ⅴ） 関数 $f(x)=3^{x+2}-9^x+1$ の最大値は [ケ] であり，最大値をとるときの x の値は [コ] である．

Ⅱ. a を正の定数とする．座標平面上の２つの放物線 $y=-x^2+3x+2$ と $y=ax^2-x+a+1$ について，次の問(ⅰ)～(ⅲ)に答えよ．

(ⅰ) ２つの放物線が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(ⅱ) ２つの放物線がちょうど２個の共有点をもつとき，それら２点の x 座標の差が２となるような a の値を求めよ．

(ⅲ) (ⅱ)で求めた a の値に対して，２つの放物線で囲まれた部分を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ．

Ⅲ. 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\sqrt{3}\cos x}$ について，次の問(ⅰ)～(ⅲ)に答えよ．

(ⅰ) $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(ⅱ) $0 < x < \pi$ における曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標を求めよ．

(ⅲ) 曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

Ⅳ. 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|=1$$

を満たすとする．また，$\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ とする．このとき，次の問(ｉ)〜(iv)に答えよ．

(ｉ) $|\vec{a}|$ を t とおくとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を t を用いて表せ．

(ii) $|\vec{a}-\vec{d}|$ を t を用いて表せ．

(iii) $|\vec{a}-\vec{d}|=|\vec{b}-\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{d}|=1$ となるような t の値を求めよ．

(iv) (iii)で求めた t の値に対して，ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直となるような実数 x, y の値を求めよ．

【以下余白】