

I.

【解答】

ア	20	イ	4	ウ	$\frac{5}{18}$	エ	2	オ	$\frac{\pi}{4}$
カ	-2	キ	4	ク	6	ケ	-1	コ	60

【解説】

(i)

$1.6^n > 10000$ より、

$$1.6^n > 10000$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{10}\right)^n > 10^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2^4}{10}\right)^n > 10^4$$

となる。両辺ともに正であるから、常用対数をとると、

$$\log_{10} \left(\frac{2^4}{10}\right)^n > \log_{10} 10^4$$

$$\Leftrightarrow n(4\log_{10} 2 - \log_{10} 10) > 4\log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow n(4 \cdot 0.3010 - 1) > 4$$

$$\therefore n > \frac{4}{0.2040} = 19.6 \dots$$

が得られる。よって、 $1.6^n > 10000$ を満たす最小の整数 n の値は $n = 20$ となる。

(ii)

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - 6x - 2a + 16$$

の両辺を x で微分すると、

$$f(x) = 2x - 6$$

となる。ここで、 $\int_a^x f(t) dt$ を計算すると、

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x (2t - 6) dt$$

$$= \left[t^2 - 6t \right]_a^x$$

$$= x^2 - 6x - a^2 + 6a$$

となる。したがって、もとの式に代入すると、

$$x^2 - 6x - a^2 + 6a = x^2 - 6x - 2a + 16$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)^2 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

となる。

(iii)

サイコロをすべて区別して考えた場合の全事象は 6^4 通りである。ここで、すべての目の数が異なる場合の数は、 ${}_6P_4$ 通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_6P_4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

となる。

(iv)

与えられた式を変形していくと、

$$(\sqrt{3})^x = 243 \times 3^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{5-2x}$$

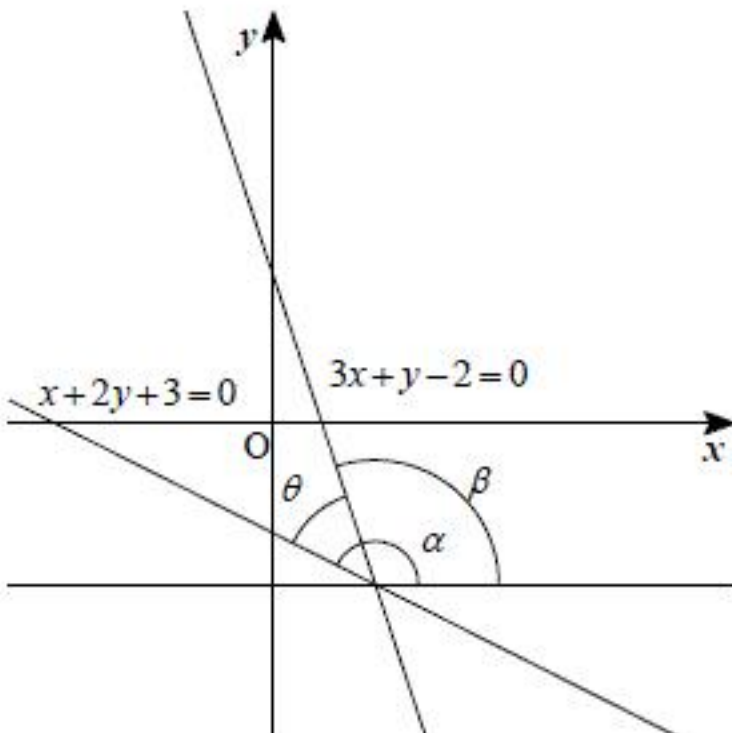
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 5 - 2x$$

$$\therefore x = 2$$

となる。

(v)

2つの直線を図示すると以下ようになる。



上図のように角度 α, β を定めると、

$$\theta = \alpha - \beta$$

となる。また、 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, $\tan \beta = -3$ であるから、

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - (-3)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3)}$$

$$= 1$$

となる。したがって、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる。

(vi)

a, b は実数であるから、 $x^2 + ax + b = 0$ は実数係数の 2 次方程式であり、 $1 + \sqrt{3}i$ がこの方程式の解であるとき、共役な複素数である $1 - \sqrt{3}i$ も解である。したがって、解と係数の関係により、

$$a = -\left\{(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i)\right\}$$

$$= -2$$

$$b = (1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 - \sqrt{3}i)$$

$$= 1 + 3$$

$$= 4$$

となる。

(vii)

2 次関数 $y = -3x^2$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の方程式は、 $x \rightarrow x - 1, y \rightarrow y - 2$ と置き換えればよいから、

$$y - 2 = -3(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = -3x^2 + 6x - 1$$

となる。したがって、 $p = 6, q = -1$ となる。

(viii)

R, I, Y の文字の順番は決まっているから、これらを $\square$ と表記して並びを考える。すると、

$$\square, \square, \square, K, K, O$$

の順列を考えればよい。したがって、求める場合の数は、

$$\frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

II.

(i)

200 以下の正の整数のうち 3 の倍数は

$$200 = 3 \cdot 66 + 2$$

より 66 個であり、99 以下の正の整数のうち 3 の倍数は

$$99 = 3 \cdot 33$$

より 33 個であるので、集合 A の要素の個数、すなわち 100 以上 200 以下の 3 の倍数の個数は

$$66 - 33 = 33 \text{ 個}$$

である。

(答) 33 個

(ii)

集合 A の要素を小さい順に並べると

$$3 \cdot 34, 3 \cdot 35, \dots, 3 \cdot 66$$

である。(i)よりその要素の個数は 33 個であるので、集合 A のすべての要素の和は

$$\begin{aligned} 3 \cdot 34 + 3 \cdot 35 + \dots + 3 \cdot 66 &= \frac{1}{2}(102 + 198) \cdot 33 \\ &= 4950 \end{aligned}$$

となる。

(答) 4950

(iii)

集合 $A \cap B$ は、100 以上 200 以下の 15 の倍数の集合である。200 以下の正の整数のうち 15 の倍数は

$$200 = 15 \cdot 13 + 5$$

より 13 個である。99 以下の正の整数のうち 15 の倍数は

$$99 = 15 \cdot 6 + 9$$

より 6 個であるので、集合 $A \cap B$ の要素の個数は

$$13 - 6 = 7 \text{ 個}$$

である。

(答) 7 個

(iv)

集合 $A \cap \overline{B}$ のすべての要素の和は、集合 A のすべての要素の和から、集合 $A \cap B$ のすべての要素の和をひいたものである。集合 $A \cap B$ の要素を小さい順に並べると

$$15 \cdot 7, 15 \cdot 8, \dots, 15 \cdot 13$$

である。(iii)より、その要素の個数は 7 個であるので、集合 $A \cap B$ のすべての要素の和は

$$\begin{aligned} 15 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + \dots + 15 \cdot 13 &= \frac{1}{2}(105 + 195) \cdot 7 \\ &= 1050 \end{aligned}$$

となる。これと(ii)より、集合 $A \cap \overline{B}$ のすべての要素の和は

$$4950 - 1050 = 3900$$

となる。

(答) 3900

(v)

集合 $A \cup B$ のすべての要素の和は、

$$(\text{集合 } A \text{ のすべての要素の和}) + (\text{集合 } B \text{ のすべての要素の和}) - (\text{集合 } A \cap B \text{ のすべての要素の和})$$

で求められる。集合 B のすべての要素の和について考える。200 以下の正の整数のうち 5 の倍数は

$$200 = 5 \cdot 40$$

より 40 個であり、99 以下の正の整数のうち 5 の倍数は

$$99 = 5 \cdot 19 + 4$$

より 19 個であるので、集合 B の要素の個数は

$$40 - 19 = 21 \text{ 個}$$

である。集合 B の要素を小さい順に並べると

$$5 \cdot 20, 5 \cdot 21, \dots, 5 \cdot 40$$

である。その要素の個数は 21 個であるので、集合 B のすべての要素の和は

$$\begin{aligned} 5 \cdot 20 + 5 \cdot 21 + \dots + 5 \cdot 40 &= \frac{1}{2}(100 + 200) \cdot 21 \\ &= 3150 \end{aligned}$$

となる。以上より、集合 $A \cup B$ のすべての要素の和は、

$$4950 + 3150 - 1050 = 7050$$

である。集合 U のすべての要素の個数は $200 - 99 = 101$ 個であり、そのすべての要素の和は

$$\frac{1}{2}(100 + 200) \cdot 101 = 15150$$

である。集合 $\overline{A \cup B}$ のすべての要素の和は、集合 U のすべての要素の和から、集合 $A \cup B$ のすべての要素の和をひいたものなので、

$$15150 - 7050 = 8100$$

と求められる。

(答) 8100

Ⅲ.

(i)

円の方程式を変形すると、

$$x^2 + y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

なので、中心の座標は $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(答) 中心の座標 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(ii)

円の中心 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ と円周上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る直線の傾きは、

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} - 0} = -2$$

である。

(答) -2

(iii)

(ii)の結果より、求める円の接線の傾きは $\frac{1}{2}$ となるから、求める方程式は

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

と求まる。

(答) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

(iv)

円の接線と放物線の交点の座標を求めるには、連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{16} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

を解けば良い。 y を消去すると

$$x^2 + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 8x - 3 = 0$$

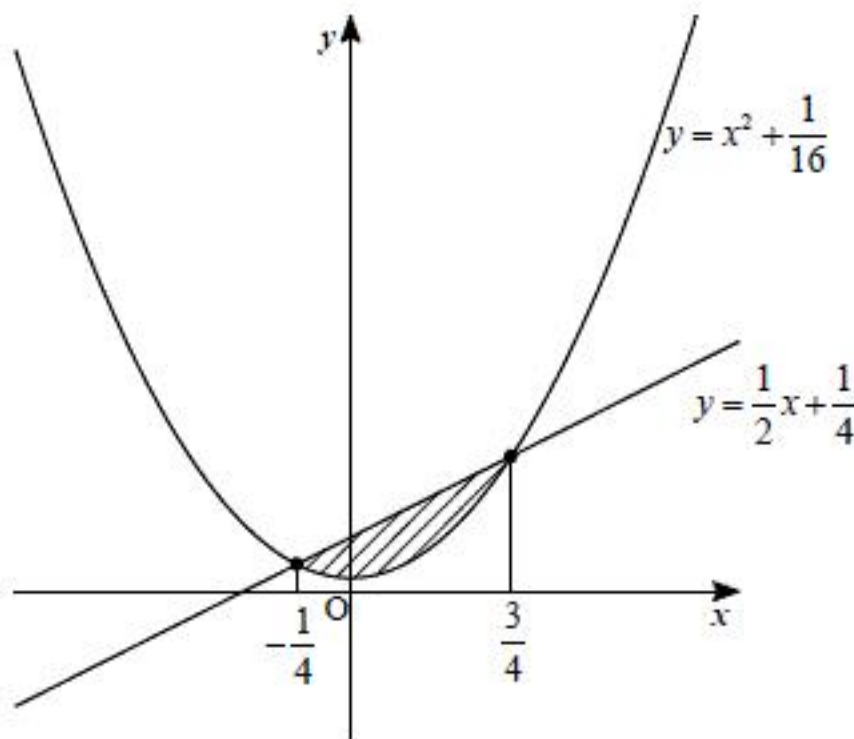
$$\Leftrightarrow (4x+1)(4x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

となる。よって、 $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ の2つの交点を得る。

(答) $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

(v)



求める面積は、

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left\{ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{16}\right) \right\} dx = -\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(x - \frac{3}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\}^3$$

$$= \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$