

I.

【解答】

ア 真 イ 真 ウ 7 エ 47 オ $k < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} < k$

カ $\frac{111}{28}$ キ 2 ク $-\sqrt{3}$ ケ 4 コ $\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}$ サ $-3, \frac{5}{2}$

【解説】

(i)

命題「 $ab=0$ ならば $b=0$ である」の逆は「 $b=0$ ならば $ab=0$ である」から真である。裏と逆は対偶の関係にあるので、裏も真となる。

(ii)

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \\&= \frac{(\sqrt{5}-1)^2 + (\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\&= 3\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\&= 3^2 - 2 \\&= 7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \\&= 7^2 - 2 \\&= 47\end{aligned}$$

である。

(iii)

2 次方程式 $x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 = 0$ の判別式 D とすると、求める条件は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \{-(k+1)\}^2 - 2k^2 \\&= -k^2 + 2k + 1 < 0 \\&\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 > 0 \\&\Leftrightarrow \{k - (1 - \sqrt{2})\} \{k + (1 + \sqrt{2})\} > 0 \\&\therefore k < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} < k\end{aligned}$$

となる。

(iv)

カードの引き方は全部で ${}_8C_6 = 28$ 通りであり、最大の数 X となりえるのは 3 か 4 である。

$X=3$ となるのは、引いたカードの組み合わせが「1, 1, 2, 2, 3, 3」のときの 1 通りであるから、

その確率は $\frac{1}{28}$ である。 $X=4$ となるのはそれ以外の 27 通りであるから、その確率は $\frac{27}{28}$ で

ある。よって、 X の期待値は

$$3 \cdot \frac{1}{28} + 4 \cdot \frac{27}{28} = \frac{111}{28}$$

である。

(v)

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta &= 2 \left(\cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \theta \cdot \frac{1}{2} \right) \\&= 2 \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} \right) \\&= 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから

$$\theta - \frac{\pi}{6} = 0 \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, 最大値 } 2$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \therefore \theta = \pi \text{ のとき, 最小値 } -\sqrt{3}$$

である。

(vi)

真数条件より、 $x > 0$ でなければならない。この条件のもとで、

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_2 x^{\frac{9}{2}} + \log_4 x^{-1} &= 4 \\&\Leftrightarrow \frac{\log_2 x^2}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{9}{2} \log_2 x + \frac{\log_2 x^{-1}}{\log_2 4} = 4 \\&\Leftrightarrow \frac{2 \log_2 x}{-1} + \frac{9}{2} \log_2 x + \frac{-\log_2 x}{2} = 4 \\&\Leftrightarrow \log_2 x = 2 \\&\Leftrightarrow x = 4\end{aligned}$$

となる。

(vii)

3 つの数は実数 a, b ($b > 0$) を用いて $a-b, a, a+b$ と表せる。このとき題意より

$$\begin{aligned}(a-b) + a + (a+b) &= 1 \\&\therefore a = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 + a^2 + (a+b)^2 &= \frac{11}{24} \\&\Leftrightarrow 3a^2 + 2b^2 = \frac{11}{24} \\&\Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{16} \\&\therefore b = \frac{1}{4} \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

と求まる。よって、3 つの数は

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}$$

である。

(viii)

$\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ が垂直であるとき、

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) &= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 \\&= 2(1+x^2) - (2-x) - 3 \cdot 5 \\&= 2x^2 + x - 15 \\&= (x+3)(2x-5) \\&= 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = -3, \frac{5}{2}$$

となる。

II

(i)

正方形 S_1 は、円 C_1 に内接する正方形なので、対角線の長さが 2 の正方形である。よって、正方形 S_1 の一辺の長さは、

$$2 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}$$

である。円 C_2 は正方形 S_1 に内接するので、その直径は正方形 S_1 の一辺の長さに等しい。よって、

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii)

正方形 S_n の一辺の長さを l_n とする。正方形 S_n は、円 C_n に内接する正方形なので

$$\begin{aligned} l_n &= 2r_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2}r_n \end{aligned}$$

である。また、円 C_{n+1} は正方形 S_n に内接するので、その直径は正方形 S_n の一辺の長さに等しい。よって、

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= l_n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\{r_n\}$ は初項 1、公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の等比数列であるので、その一般項は

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

(iii)

(ii) より、

$$l_n = \sqrt{2}r_n = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

であるので、

$$\begin{aligned} A_n &= (l_n)^2 \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2(n-1)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} T_n &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_n = 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

(iv)

円 C_1 の面積は、

$$1 \cdot 1 \cdot \pi = \pi$$

である。ここで、(iii) より、 T_n は n についての単調増加関数であり、

$$T_2 = 3 < \pi$$

$$T_3 = \frac{7}{2} > \pi$$

より、 T_n が円 C_1 の面積よりも大きくなるような自然数 n のうち、最小のものは 3 である。

Ⅲ.

(i)

放物線 C と直線 l が接するので、

$$\begin{aligned} -x+1 &= \frac{1}{4}x^2 + qx + r \\ \Leftrightarrow x^2 + 4(q+1)x + 4(r-1) &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が重解を持つ。したがって、①の判別式を D_1 とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(q+1)^2 - 4(r-1) &= 0 \\ \therefore r &= q^2 + 2q + 2 \end{aligned}$$

が成り立つ。また、このとき①の解は、

$$x = -2(q+1)$$

であるから、点 A の x 座標を x_A とすると、

$$x_A = -2(q+1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = q^2 + 2q + 2, \text{ 点 } A \text{ の } x \text{ 座標: } -2(q+1)$$

(ii)

(i)より、放物線 C の方程式は

$$y = \frac{1}{4}x^2 + qx + q^2 + 2q + 2$$

と表せる。これと直線 m が接しているから、

$$\begin{aligned} px - p^3 &= \frac{1}{4}x^2 + qx + q^2 + 2q + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4(q-p)x + 4(p^3 + q^2 + 2q + 2) &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が重解を持つ。したがって、②の判別式を D_2 とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(q-p)^2 - 4(p^3 + q^2 + 2q + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4q^2 - 8pq + 4p^2 - 4p^3 - 4q^2 - 8q - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8(p+1)q &= -4(p^3 - p^2 + 2) \\ \Leftrightarrow 8(p+1)q &= -4(p+1)(p^2 - 2p + 2) \\ \therefore q &= -\frac{1}{2}p^2 + p - 1 \quad (\because p \neq -1) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、このとき②の解は、

$$\begin{aligned} x &= -2(q-p) \\ &= -2\left(-\frac{1}{2}p^2 + p - 1\right) + 2p \\ &= p^2 - 2p + 2 + 2p \\ &= p^2 + 2 \end{aligned}$$

であるから、点 B の x 座標を x_B とすると、

$$x_B = p^2 + 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = -\frac{1}{2}p^2 + p - 1, \text{ 点 } B \text{ の } x \text{ 座標: } p^2 + 2$$

(iii)

(i), (ii)より、

$$q = -\frac{1}{2}p^2 + p - 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} r &= (q+1)^2 + 1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}p^2 + p\right)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4}p^4 - p^3 + p^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 + qx + r \\ &= \frac{1}{4}(x+2q)^2 - q^2 + r \end{aligned}$$

と平方完成できるので、放物線 C の頂点の y 座標は、

$$-q^2 + r$$

となる。したがって、 $-q^2 + r$ が最大となるような p を求める。③より、

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(-\frac{1}{2}p^2 + p - 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}p^4 - p^3 + 2p^2 - 2p + 1 \end{aligned}$$

であるから、上式と④より、

$$\begin{aligned} -q^2 + r &= -\left(\frac{1}{4}p^4 - p^3 + 2p^2 - 2p + 1\right) + \left(\frac{1}{4}p^4 - p^3 + p^2 + 1\right) \\ &= -p^2 + 2p \\ &= -(p-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

と変形できるので、 $p=1$ のとき、放物線 C の頂点の y 座標が最大となる。

$$(\text{答}) \quad p=1$$

(iv)

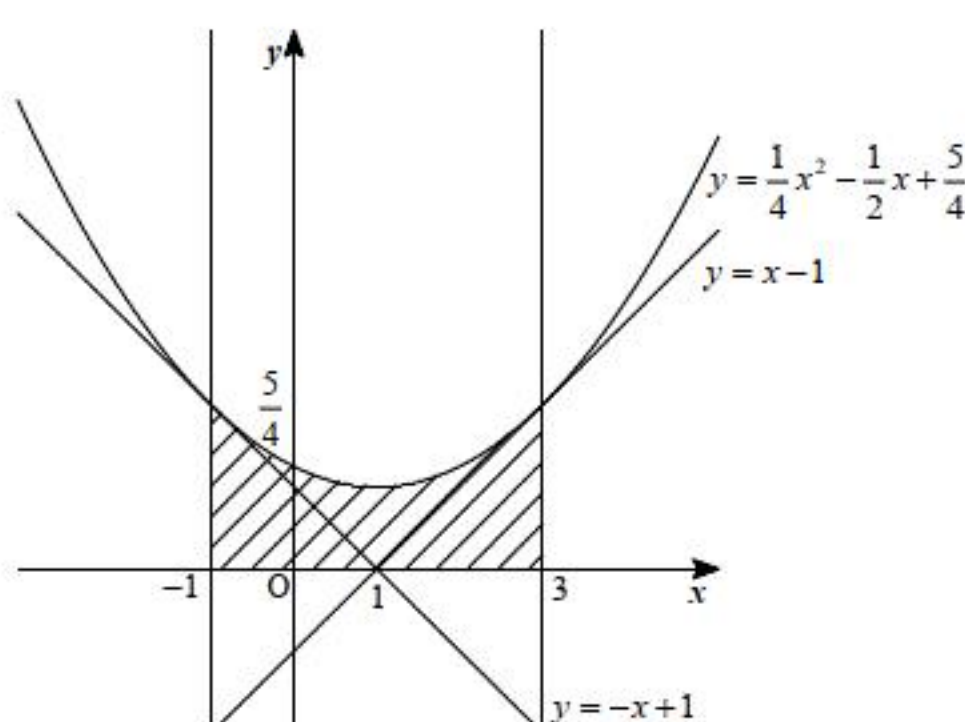
$p=1$ を③、④に代入して、

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2} + 1 - 1 = -\frac{1}{2} \\ r &= \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \\ x_A &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -1 \\ x_B &= 1^2 + 2 = 3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 C の方程式は

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

となるので、求める面積は下図の斜線部の面積である。



したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_{-1}^3 \\ &= \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{15}{4} \right) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) \\ &= \frac{15}{4} + \frac{19}{12} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{16}{3}$$