

I

(i)

$$\text{ア} \quad \frac{1}{9}, 27$$

(ii)

$$\text{イ} \quad -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

(iii)

$$\text{ウ} \quad 2$$

(iv)

$$\text{エ} \quad \frac{\sqrt{14}}{4}$$

(v)

$$\text{オ} \quad \frac{7}{216}$$

(vi)

$$\text{カ} \quad -6 \quad \text{キ} \quad 9 \quad \text{ク} \quad 1$$

(vii)

$$\text{ケ} \quad -4$$

(viii)

$$\text{コ} \quad -2 - \sqrt{5} \quad \text{サ} \quad -2 + \sqrt{5}$$

【解説】

(i)

真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots \text{①}$$

であり、 $\log_3 x = t$ とおくと

$$\begin{aligned} & (\log_3 x)(\log_3 9x) - 6\log_3 x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_3 x)(\log_3 9 + \log_3 x) - 6 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & t(2+t) - 3t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 - t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (t+2)(t-3) = 0 \\ \Leftrightarrow & t = -2, 3 \\ \therefore & x = \frac{1}{9}, 27 \end{aligned}$$

となる。これは①を満たす。

(ii)

直線 AB の傾きは

$$\frac{7-1}{3-1} = 3$$

であるので、求める直線の傾きは $-\frac{1}{3}$ となる。これが $(-1, 5)$ を通るので、その方程式は

$$\begin{aligned} y - 5 &= -\frac{1}{3}(x + 1) \\ \therefore y &= -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \end{aligned}$$

となる。

(iii)

x は実数なので、実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned} (1+i)x^2 - (5+i)x + 6 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) + i(x^2 - x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 & \cdots \text{①} \\ x^2 - x - 2 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

となる。①を解くと $x = 2, 3$ となり、②を解くと $x = -1, 2$ となる。よって、①、②を両方みたすのは $x = 2$ となる。

(iv)

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\sin^2 \theta$ で割ると

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \therefore \sin^2 \theta &= \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta > 0$ なので、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$ となる。

(v)

出た目の最小値が 5 となる組み合わせは、3 つのさいころの目が $(5, 5, 5), (5, 5, 6), (5, 6, 6)$ となるときであるので、その確率は

$$\frac{1 + {}_3C_1 + {}_3C_1}{6^3} = \frac{7}{216}$$

となる。

(vi)

整式 $P(x)$ を $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ で割った余りが $-2x+7$ であるから、ある整式 $Q(x)$ を用いて

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) - 2x + 7$$

とおける。よって

$$\begin{aligned} P(1) &= -2 \cdot 1 + 7 = 5 \\ \Leftrightarrow 1 + a + b + c &= 5 \\ \therefore a + b + c &= 4 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= -2 \cdot 2 + 7 = 3 \\ \Leftrightarrow 8 + 4a + 2b + c &= 3 \\ \therefore 4a + 2b + c &= -5 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

となる。また、 $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であり、 $y = P(x)$ は $x = 1$ で極値をとるので

$$\begin{aligned} P'(1) &= 0 \\ \therefore 2a + b + 3 &= 0 \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

となる。①、②、③より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = -5 \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(vii)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (5 - 4 - 9) \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。

(viii)

$y = 2x + k$ を $x^2 - 2x + y^2 = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + (2x + k)^2 &= 0 \\ \therefore 5x^2 + (4k - 2)x + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この x についての方程式が実数解を持てばよいので、その条件は、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2k-1)^2 - 5k^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow k^2 + 4k - 1 &\leq 0 \\ \therefore -2 - \sqrt{5} &\leq k \leq -2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

II

(i)

一等賞が出る確率は $1-p-q$ なので、求める期待値は

$$10 \cdot (1-p-q) + 2 \cdot p + 0 \cdot q = 10 - 8p - 10q$$

となる。

(答) $10 - 8p - 10q$

(ii)

ゲーム終了後、12個のメダルを手にはしているのは、「1回目に一等賞、2回目に二等賞が出たとき」または「1回目に二等賞、2回目に一等賞が出たとき」であるので、その確率は

$$(1-p-q) \cdot p + p \cdot (1-p-q) = 2p(1-p-q)$$

となる。

(答) $2p(1-p-q)$

(iii)

ゲーム終了後、12個のメダルを手にはしているのは、一等賞、二等賞、はずれがそれぞれ1回ずつ出たときであるので、その確率は

$$3 \times (1-p-q) \cdot p \cdot q = 6pq(1-p-q)$$

となる。

(答) $6pq(1-p-q)$

(iv)

ゲーム終了後、10個のメダルを手にはしているのは、「一等賞が1回、はずれが4回出たとき」または「二等賞が5回出たとき」であるので、その確率は

$${}_3C_1 \times (1-p-q) \cdot q^4 + p^5 = p^5 + 5q^4(1-p-q)$$

となる。

(答) $p^5 + 5q^4(1-p-q)$

(v)

ちょうど7回目でゲームが終了するのは、はじめの5回で二等賞が1回、はずれが4回出て、6回目と7回目にはずれが出たときであるので、その確率は

$$({}_3C_1 \times p \cdot q^4) \cdot q \cdot q = 5pq^6$$

となる。

(答) $5pq^6$

Ⅲ

(i)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_y^{y+2} f(x) dx &= \int_y^{y+2} (ax^2 + bx + c) dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_y^{y+2} \\ &= 2ay^2 + (4a + 2b)y + \left(\frac{8}{3}a + 2b + 2c \right)\end{aligned}$$

となる。いま、 $\int_y^{y+2} f(x) dx = 2y^2 + 4y + 2$ であるので、係数を比較すると

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 4a + 2b = 4 \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 2 \end{cases}$$

となる。これを解くと

$$a = 1, b = 0, c = -\frac{1}{3}$$

となる。よって

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $x^2 - \frac{1}{3}$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} f(x) dx &= \int_1^{n+1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} \right]_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

であるので

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

となる。よって $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= n^2 + n\end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも

$$1^2 + 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1)(1+2)$$

より成立する。

(答) $n^2 + n$

(iii)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m ka_k &= \sum_{k=1}^m k(k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^m (k^3 + k^2) \\ &= \frac{1}{4}m^2(m+1)^2 + \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \\ &= \frac{1}{12}m(m+1)(m+2)(3m+1)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{12}m(m+1)(m+2)(3m+1)$

(iv)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2 + k} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $1 - \frac{1}{m+1}$