

I.

【解答】

(i) ア -3 イ $x=1, 1\pm\sqrt{2}$

(ii) ウ $\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}x}$ エ $-\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}x}$

(iii) オ $-\frac{1}{2}$ カ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) キ 11 ク 5

(v) ケ 3 コ -4

【解説】

(i) 方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ の共通解を t とおくと、 t は

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) \\ \Leftrightarrow (a-1)t^2 - (a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 1 &= 0 \quad (\because a \neq 1) \\ \therefore t &= -1, 1 \end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $t=-1$ であるとする

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a-1 &= 0 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $a \neq 1$ に反するため不適である。よって $t=1$ であり、このとき

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a+3 &= 0 \\ \therefore a &= -3 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x} \sin x + e^{-\sqrt{3}x} \cos x \\ &= 2e^{-\sqrt{3}x} \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \frac{5}{6}\pi &= n\pi \\ \Leftrightarrow x &= \left(n - \frac{5}{6}\right)\pi \end{aligned}$$

となる(ただし、 n は整数)。よって、 $x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{6}\pi$	$\cdots$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\cdots$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\cdots$	(0)

増減表より、 $x>0$ における $f(x)$ の最大値は、極大値の中で最大のもので、最小値は極小値の中で最小のものであることがわかる。ここで、 m を 0 以上の整数として、 $f(x)$ は

$$x = \left(2m + \frac{1}{6}\right)\pi \text{ のとき極大値をとり, } x = \left(2m + \frac{7}{6}\right)\pi \text{ のとき極小値をとる。}$$

$$\alpha_m = \left(2m + \frac{1}{6}\right)\pi, (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$\beta_m = \left(2m + \frac{7}{6}\right)\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、

$$f(\alpha_m) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\left(2m+\frac{1}{6}\right)\pi}, f(\beta_m) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}\left(2m+\frac{7}{6}\right)\pi}$$

より、 $f(\alpha_m)$ は m について単調減少、 $f(\beta_m)$ は m について単調増加することがわかる。したがって、 $f(x)$ の最大値、すなわち極大値の中で最大のものは

$$f(\alpha_0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$$

である。また、 $f(x)$ の最小値、すなわち極小値の中で最小のものは

$$f(\beta_0) = f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi}$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned} z^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z^3 &= -1 \end{aligned}$$

より $z^6=1$ であるから、

$$\begin{aligned} z^{2014} &= (z^6)^{335} \cdot z^3 \cdot z \\ &= -z \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

となる。

(iv)

$\log_a b$ が整数となる (a, b) の組は

$$(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9), \\ (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)$$

の11通りであり、整数でない有理数となる (a, b) の組は

$$(4, 2), (4, 8), (8, 2), (8, 4), (9, 3)$$

の5通りである。

(v)

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

より、

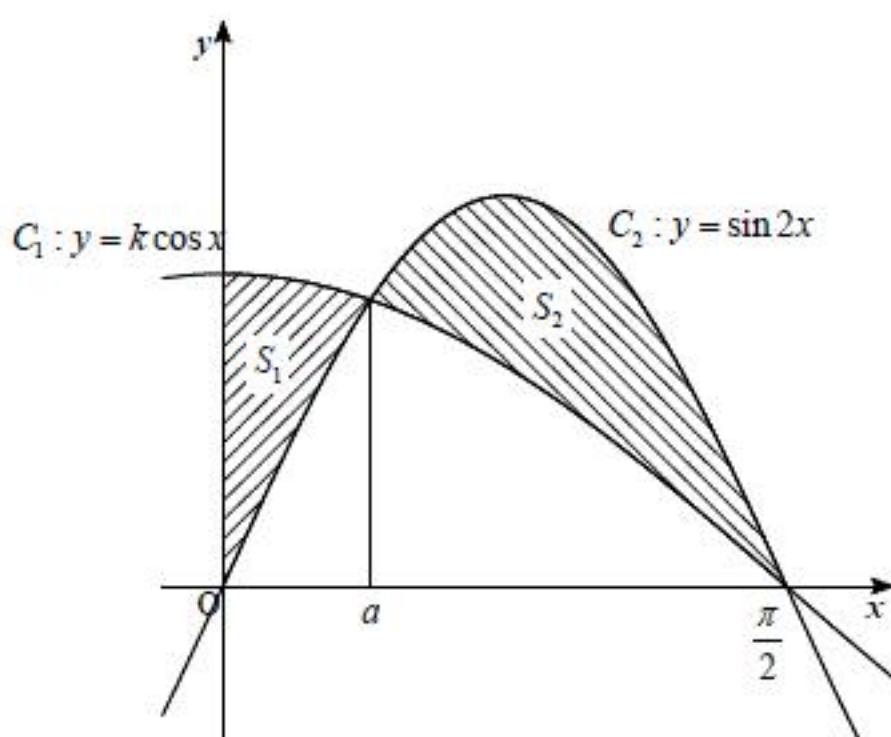
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= p|\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} = p + \frac{1}{3}q \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= p\vec{a} \cdot \vec{b} + q|\vec{b}|^2 = \frac{1}{3}p + q \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{cases} p + \frac{1}{3}q = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}p + q = -3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

II.



(i)

$y = k \cos x$, $y = \sin 2x$ を連立して y を消去すると,

$$k \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x (k - 2 \sin x) = 0$$

となる。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, つねに, $\cos x > 0$ であるから, 求める条件は,

$$k = 2 \sin x \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす x が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に存在するような k の値の範囲である。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$0 < \sin x < 1$ であるから, 求める範囲は, $0 < k < 2$ となる。

(答) $0 < k < 2$

(ii)

C_1 と C_2 の交点の x 座標 $x = a$ は①を満たすので, $\sin a = \frac{k}{2}$ である。

(答) $\sin a = \frac{k}{2}$

(iii)

$0 \leq x \leq a$ において, $k \cos x \geq \sin 2x$ であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a (k \cos x - \sin 2x) dx \\ &= \left[k \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^a \\ &= \left(k \sin a + \frac{1}{2} \cos 2a \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \right) \\ &= k \sin a + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 a) - \frac{1}{2} \\ &= k \cdot \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} k^2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 = \frac{1}{4} k^2$

(iv)

$a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, $k \cos x \leq \sin 2x$ であるから,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - k \sin x \right]_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - k \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 2a - k \sin a \right) \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 a) + k \sin a \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2} - \left(\frac{k}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} k^2 \\ &= \frac{1}{4} k^2 - k + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_2 = \frac{1}{4} k^2 - k + 1$

(v)

(iii), (iv) の結果より,

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{1}{4} k^2 - k + 1 \\ &= \frac{1}{2} (k-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので, $0 < k < 2$ に注意すると, $S_1 + S_2$ は $k=1$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

(答) $\frac{1}{2}$

III.

与えられた関係式を計算すると、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n & 0 \\ a_n + 3b_n & 3c_n \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

(i)

①より、 $a_{n+1} = 2a_n$ であるから、数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 、公比2の等比数列であり、

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

となる。また、 $c_{n+1} = 3c_n$ であるから、数列 $\{c_n\}$ は初項 c_1 、公比3の等比数列であり、

$$c_n = c_1 \cdot 3^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}, \quad c_n = c_1 \cdot 3^{n-1}$$

(ii)

①と(i)の答より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n + 3b_n \\ &= 3b_n + a_1 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = 3b_n + a_1 \cdot 2^{n-1}$$

(iii)

(ii)の答の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{b_n}{3^n} + \frac{a_1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad \therefore d_{n+1} = d_n + \frac{a_1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad d_{n+1} = d_n + \frac{a_1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

(iv)

(iii)の答より、 d_n は $d_{n+1} - d_n = \frac{a_1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ を階差数列にもつので、 $n \geq 2$ に対し、

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} \\ &= \frac{b_1}{3} + \frac{a_1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{a_1 + b_1}{3} - \frac{a_1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも正しい。

$$(\text{答}) \quad d_n = \frac{a_1 + b_1}{3} - \frac{a_1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

(v)

(iv)の答より、

$$b_n = 3^n d_n = (a_1 + b_1) \cdot 3^{n-1} - a_1 \cdot 2^{n-1}$$

である。一方、与えられた関係式より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} & 0 \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

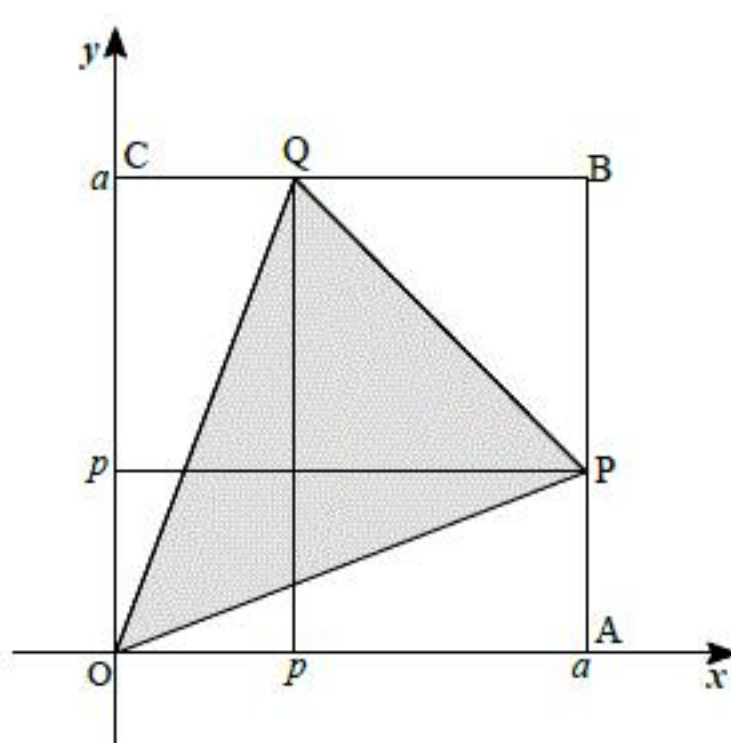
が成り立つ。したがって、 $a_1 = c_1 = 1, b_1 = 0$ と選んでくることにより、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2^n & 0 \\ (1+0)3^n - 1 \cdot 2^n & 1 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}$$

IV.



(i)

線分 PQ と線分 AC は平行であるから、BA = BC より

$$QB = BP = a - p, CQ = PA = p$$

である。よって三角形 OPQ の面積 S は

$$a^2 - \left\{ \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}(a-p)^2 \right\} = \frac{1}{2}(a^2 - p^2)$$

となる。

$$(答) \frac{1}{2}(a^2 - p^2)$$

(ii)

$$OP = OQ = \sqrt{a^2 + p^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

より、(i)の結果から

$$\frac{1}{2}OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ = S$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 + p^2) \sin \angle POQ = \frac{1}{2}(a^2 - p^2)$$

$$\therefore \sin \angle POQ = \frac{a^2 - p^2}{a^2 + p^2}$$

となる。よって、三角形 OPQ に正弦定理を用いることにより、その外接円の半径 R は

$$\frac{PQ}{\sin \angle POQ} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(a-p) \cdot \frac{a^2 + p^2}{a^2 - p^2} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{2}(a^2 + p^2)}{2(a+p)}$$

と求まる。

$$(答) \frac{\sqrt{2}(a^2 + p^2)}{2(a+p)}$$

(iii)

このとき、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ap = 1 \\ \frac{1}{2}(a-p)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ap = 2 \\ (a-p)^2 = 2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\therefore (a+p)^2 = (a-p)^2 + 4ap = 10$$

より

$$a-p = \sqrt{2}, a+p = \sqrt{10}$$

である。

$$(答) a-p = \sqrt{2}, a+p = \sqrt{10}$$

(iv)

(iii)の結果を連立して解くと

$$a = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, p = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

を得る。

$$(答) a = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, p = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$

(v)

このとき、②より

$$a^2 + p^2 = (a-p)^2 + 2ap = 6$$

であるから、①より

$$OP = OQ = \sqrt{6}$$

であり、また(iii)の結果より

$$PQ = \sqrt{2}(a-p) = 2$$

である。よって三角形 OPQ の内接円の半径 r は

$$S = \frac{1}{2}r(OP + OQ + PQ)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2S}{OP + OQ + PQ}$$

$$= \frac{a^2 - p^2}{\sqrt{6} + \sqrt{6} + 2}$$

$$= \frac{(a-p)(a+p)}{2(\sqrt{6} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6} - 1)}{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{30} - \sqrt{5}}{5}$$

と求まる。

$$(答) \frac{\sqrt{30} - \sqrt{5}}{5}$$