

2014年度

E 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア, イに「真」または「偽」のいずれかを記入せよ, また空欄ウ～サに当てはまる数または式を記入せよ, 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 実数 a, b について, 命題「 $ab = 0$ ならば $b = 0$ である」の逆は であ

り, 裏は である.

(ii) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2} =$, $x^4 + \frac{1}{x^4} =$ と, いずれも整数で表せる.

(iii) すべての実数 x について2次不等式 $x^2 - 2(k+1)x + 2k^2 > 0$ が成立するよ
うな実数 k の範囲は である.

(iv) 1から4までの数字が1つずつ書かれたカードをそれぞれ2枚用意する. この8枚
のカードから6枚を同時に引き, その中で最大の数を X とするとき, X の期待値
は である.

(v) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$ の最大値は であり, 最小値は
 である.

(vi) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_2 x^{\frac{3}{2}} + \log_4 x^{-1} = 4$ を満たす x の値は である.

(vii) 等差数列をなす3つの数がある. これらの和が1で, 平方の和が $\frac{11}{24}$ であるとき,
3つの数は である.

(viii) ベクトル $\vec{a} = (1, x)$, $\vec{b} = (2, -1)$ について, $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ が垂直で
あるときの x の値をすべて求めると, である.

II. C_1 を半径 1 の円とする. 円 C_1 に内接する正方形を S_1 とする. 正方形 S_1 に内接する円を C_2 とする. 以下同様に, 円 C_n に内接する正方形を S_n とし, 正方形 S_n に内接する円を C_{n+1} とする. このとき, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 円 C_2 の半径を r_2 とする. r_2 を求めよ.

(ii) 円 C_n の半径を r_n とする. r_n を n の式で表せ.

(iii) 正方形 S_n の面積を A_n とし, $T_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ とする. T_n を n の式で表せ.

(iv) T_n が円 C_1 の面積よりも大きくなるような自然数 n のうち, 最小のものを求めよ.

Ⅲ. 実数 $p \neq -1$ に対し, 2つの直線 l, m と放物線 C を

$$l: y = -x + 1, m: y = px - p^3, C: y = \frac{1}{4}x^2 + qx + r$$

とする. このとき, 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 放物線 C と直線 l が点 A で接しているとき, r を q の2次式で表せ. また, 点 A の x 座標を q を用いて表せ.

(ii) 放物線 C と直線 l が点 A で接し, さらに放物線 C と直線 m が点 B で接しているとき, q を p の2次式で表せ. また, 点 B の x 座標を p を用いて表せ.

(iii) 放物線 C と直線 l が点 A で接し, さらに放物線 C と直線 m が点 B で接しているとき, 放物線 C の頂点の y 座標が最大になるような p の値を求めよ.

(iv) (i), (ii), (iii)で定められる p, q, r に対して, 点 A を通り y 軸と平行な直線, 点 B を通り y 軸と平行な直線, x 軸, および放物線 C で囲まれる部分の面積を求めよ.

【以下余白】

