

2014年度

A_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 1でない実数 a に対し, $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + a$ とする. 方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ がただ1つの共通解をもつならば, $a =$ であり, $f(x) = 0$ のすべての解は である.

(ii) $x > 0$ のとき, $f(x) = e^{-\sqrt{3}x} \sin x$ の最大値は であり, 最小値は である.

(iii) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき, $z^{2014} =$ $+$ i である. ただし, i は虚数単位とする.

(iv) a, b を2から9までの自然数とするととき, a, b の組 (a, b) は64通りあるが, そのうち $\log_a b$ が整数となるのは 通りであり, 整数でない有理数となるのは 通りである.

(v) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ かつ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}$ を満たす. このとき, ベクトル $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ が $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{5}{3}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$ を満たすならば, $p =$, $q =$ である. ただし, p, q は実数とする.

Ⅱ. k を実数とし、座標平面上の 2 つの曲線

$$C_1: y = k \cos x, \quad C_2: y = \sin 2x$$

を考える. このとき、次の問(i)に答えよ.

- (i) C_1, C_2 が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において共有点をもつとき、 k の取りうる値の範囲を求めよ.

以下では k が(i)の条件を満たすものとし、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における C_1, C_2 の共有点の x 座標を a とおく. このとき、次の問(ii)~(v)に答えよ.

- (ii) $\sin a$ を k を用いて表せ.

- (iii) 座標平面上の $0 \leq x \leq a$ の部分において、 C_1, C_2 および y 軸によって囲まれる図形の面積を S_1 とする. S_1 を k を用いて表せ.

- (iv) 座標平面上の $a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分において、 C_1, C_2 によって囲まれる図形の面積を S_2 とする. S_2 を k を用いて表せ.

- (v) k が(i)で求めた範囲を動くとき、 $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ.

Ⅲ. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ に対して, 次の関係式が成り立っているものとする.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ.

(i) a_n, c_n を n, a_1, c_1 を用いて表せ.

(ii) b_{n+1} を n, a_1, b_n を用いて表せ.

(iii) $d_n = \frac{b_n}{3^n}$ として数列 $\{d_n\}$ を定める. 数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を求めよ.

(iv) d_n を n, a_1, b_1 を用いて表せ.

(v) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n$ を n を用いて表せ.

IV. a を正の実数とする. 座標平面上に 4 点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$ がある. 四角形 $OABC$ の辺 AB 上に点 $P(a, p)$ をとり, 点 P を通り AC と平行な直線と BC との交点を Q とする. このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ.

(i) 三角形 OPQ の面積 S を a と p を用いて表せ.

(ii) 三角形 OPQ の外接円の半径 R を a と p を用いて表せ.

(iii) 三角形 OAP と三角形 PBQ の面積がともに 1 であるとき, $a - p$ と $a + p$ の値を求めよ.

(iv) (iii) のとき, a と p の値を求めよ.

(v) a と p が (iv) で求めた値であるとき, 三角形 OPQ の内接円の半径 r の値を求めよ.

【以下余白】

