

I

[解答]

- (i) $\boxed{\text{ア}}$ 3 (ii) $\boxed{\text{イ}}$ $-x^2-3x-1$ (iii) $\boxed{\text{ウ}}$ $\{2, 6, 7, 8\}$ (iv) $\boxed{\text{エ}}$ $\frac{3}{8}$
- (v) $\boxed{\text{オ}}$ 17 (vi) $\boxed{\text{カ}}$ $1, -4$ (vii) $\boxed{\text{キ}}$ $\frac{3}{2}x^2+2x-2$ (viii) $\boxed{\text{ク}}$ 20825

[解説]

(i)

$$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=2$$

であるから, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ より,

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 &=13 \\ \Leftrightarrow 25-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4 &=13 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} &=8 \end{aligned}$$

である。したがって, $|\vec{c}|=|\vec{a}-t\vec{b}|$ より,

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 25-16t+4t^2 \\ &= 4(t-2)^2+9 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$|\vec{c}|=\sqrt{4(t-2)^2+9}$$

である。よって, $t=2$ のとき, $|\vec{c}|$ は最小値 3 をとる。

(ii)

$f(x)$ は $(x+2)^2$ で割ると $x+3$ 余るという条件から, 整式 $p(x)$, 整数 a を用いて

$$f(x)=p(x)(x+5)(x+2)^2+a(x+2)^2+x+3$$

とおくことができる。 $f(x)$ は $x+5$ で割ると -11 余るので, 剰余の定理より,

$$\begin{aligned} f(-5) &= -11 \\ \Leftrightarrow 9a-2 &= -11 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 余りは,

$$\begin{aligned} -(x+2)^2+x+3 \\ = -x^2-3x-1 \end{aligned}$$

である。

(iii)

$$\overline{A\cap B}=\overline{A\cup B}$$

であるから,

$$A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

となり, $A\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ と合わせて,

$$A=\{2, 6, 7, 8\}$$

である。

(iv)

偶数の目が出る確率は,

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

であるから, 求める確率は,

$${}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

である。

(v)

t 時間後の細胞の数は, $10\cdot 2^t$ 個であるから, 初めて 100 万個を超えるのは,

$$\begin{aligned} 10\cdot 2^t &> 10^6 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10\cdot 2^t &> \log_{10} 10^6 \\ \Leftrightarrow 1+0.301\cdot t &> 6 \\ \Leftrightarrow t &> \frac{5}{0.301} \\ \Leftrightarrow t &> 16.6\cdots \end{aligned}$$

より, 17 時間後である。

(vi)

$$\begin{aligned} z^4 &= (a+i)^4 \\ &= (a^4-6a^2+1)+(4a^3-4a)i \end{aligned}$$

であるから, z^4 が実数となるとき,

$$\begin{aligned} 4a^3-4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a+1)(a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, 0, 1 \end{aligned}$$

より, $a=-1, 0, 1$ である。このとき,

$$z^4=a^4-6a^2+1$$

であるから, $a=0$ のとき 1, $a=\pm 1$ のとき -4 である。

(vii)

$f'(x)=3x+2$ より,

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数})$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2+2x+C \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3+x^2+Cx \right]_0^2 \\ &= 2C+8 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} 2C+8 &= 4 \\ \Leftrightarrow C &= -2 \end{aligned}$$

であるから,

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-2$$

である。

(viii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (4k^2-4k+1) \\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n \\ &= \frac{1}{3}n(4n^2-1) \\ &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) \end{aligned}$$

であるから, これに $n=25$ を代入すると,

$$\sum_{k=1}^{25} (2k-1)^2 = 20825$$

となる。

II

(i)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より,}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} > 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \cos \theta \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \sin \theta \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{b}{c} = \frac{2t}{1+t^2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{b}{a+c} &= \frac{1}{\frac{a+c}{b}} \\ &= \frac{1}{\frac{c}{b} \left(\frac{a}{c} + 1 \right)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1+t^2}{2t} \right) \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{t}} \\ &= t \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{b}{a+c} = t$$

(iii)

$$t = \tan \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より,}$$

$$0 < t < 1$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t^2} &= \frac{12}{13} \\ \Leftrightarrow 26t &= 12t^2 + 12 \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-2)(2t-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3}$$

(iv)

c は直角三角形の斜辺であるから,

$$c > a \quad \text{かつ} \quad c > b$$

である。したがって, 順は $a < b < c$ または $b < a < c$ である。

[1] $a < b < c$ のとき

$$\begin{aligned} b-a &= c-b \\ \Leftrightarrow \frac{a+c}{b} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t} &= 2 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。このとき,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \\ \frac{b}{c} &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

である。

[2] $b < a < c$ のとき

$$\begin{aligned} a-b &= c-a \\ \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} &= 2 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} &= \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &= \left(\frac{2t}{1+t^2} + 1 \right) \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ &= \frac{(1+t)^2}{1-t^2} \\ &= \frac{1+t}{1-t} \end{aligned}$$

であるから, ①より,

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{1-t} &= 2 \\ \Leftrightarrow 2-2t &= t+1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \\ \frac{b}{c} &= \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より, $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

III

(i)

l_1 と l_2 の交点の座標は、

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

の連立方程式を解くと、 $(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ と求められる。

$$(\text{答}) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

(ii)

C の式に $y = 3x - 1$ を代入して y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 1)^2 - 4x - 2(3x - 1) + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 16x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x - 3)(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}, 1 \end{aligned}$$

であるから、 C と l_1 との交点の座標は、 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 2)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 2)$$

(iii)

(ii) と同様にして、 C の式に $x = -3y + 3$ を代入して x を消去すると、

$$\begin{aligned} (-3y + 3)^2 + y^2 - 4(-3y + 3) - 2y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10y^2 - 8y &= 0 \\ \Leftrightarrow y(5y - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow y = 0, \frac{4}{5} \end{aligned}$$

であるから、 C と l_2 との交点の座標は、 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$$

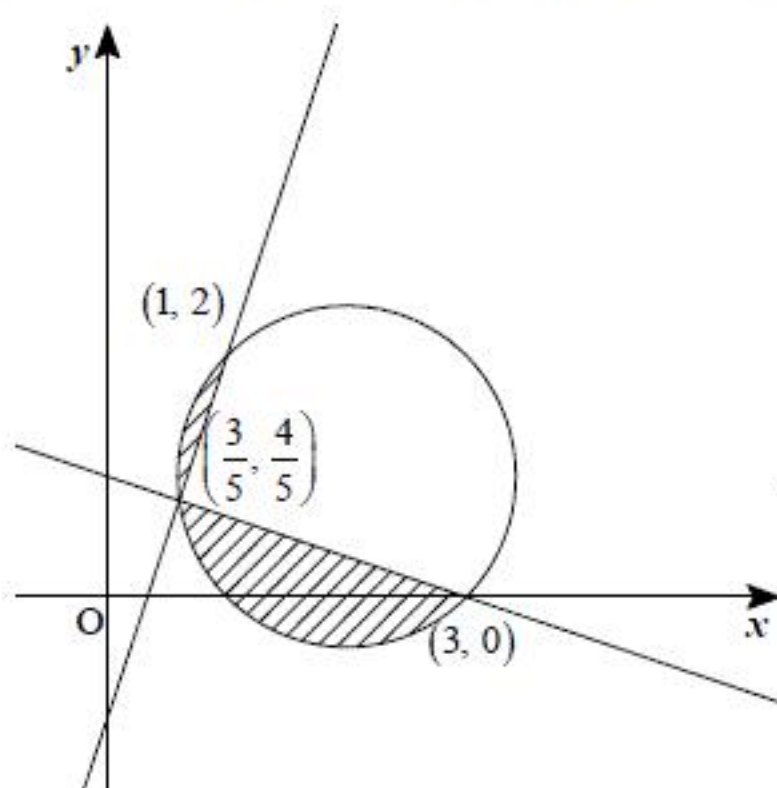
(iv)

$$\begin{aligned} (3x - y - 1)(x + 3y - 3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow y \geq 3x - 1 \text{ かつ } y \geq -\frac{1}{3}x + 1 &\text{ または } y \leq 3x - 1 \text{ かつ } y \leq -\frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

である。また、円 C は

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

より、中心の座標 $(2, 1)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円である。よって問題の領域は下の図のようになる。



ただし、境界線も含む。 $(1, 2)$ と $(3, 0)$ と通る直線は、 $y = -x + 3$ であり、これは円 C の中心 $(2, 1)$ を通るので、上図の領域の面積は、円 C の半円の面積から、 $(1, 2), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$ を頂点とする三角形の面積を引いたものである。ここで、 $(1, 2), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ を結ぶ辺のベクトルは、

$\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$ であり、 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$ を結ぶ辺のベクトルは、 $\left(\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ であることから、

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 0$$

となり、 $(1, 2), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ を結ぶ辺と $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$ を結ぶ辺は直交する。よって、

$(1, 2), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (3, 0)$ を頂点とする三角形の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{8}{5}$$

である。よって、求める領域の面積は、

$$\pi(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{5} = \pi - \frac{8}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \pi - \frac{8}{5}$$