

I

【解答】

(i) ア 54

(ii) イ -1 ウ 1

(iii) エ $-\frac{11}{3}$

(iv) オ $5^{\frac{1}{5}}$ カ $2^{\frac{1}{2}}$ キ $3^{\frac{1}{3}}$

(v) ク $\frac{1}{4} < x < 2$

(vi) ケ $2n\sin\frac{\pi}{n}$

(vii) コ 6 サ 9

(viii) シ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

【解説】

(i) xyz の係数に注目して計算すると、
 $2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 3\cdot 1+3\cdot 1\cdot 2+3\cdot 3\cdot 3+1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 3=54$
となる。

(ii)
$$\frac{i}{1+xi}+\frac{x+2}{y+i}=0$$
$$\Leftrightarrow i(y+i)+(x+2)(1+xi)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)+\{x(x+2)+y\}i=0$$

となるので、係数比較して

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x(x+1)+y=0 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

である。

(iii)
$$\int_{-2}^2 x|x-1|dx=\int_{-2}^1\{-x(x-1)\}dx+\int_1^2 x(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=-\frac{11}{3}$$

である。

(iv) $2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ について、それぞれ6乗すると、
 $2^{\frac{1}{2}\cdot 6}=8, 3^{\frac{1}{3}\cdot 6}=9$

となるので、 $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$ である。また、 $2^{\frac{1}{2}}$ と $5^{\frac{1}{5}}$ について、それぞれ10乗すると、

$$2^{\frac{1}{2}\cdot 10}=32, 5^{\frac{1}{5}\cdot 10}=25$$

となるので、 $2^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{5}}$ である。よって、 $5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$ である。

(v) 真数条件より、 $x > 0$ である。

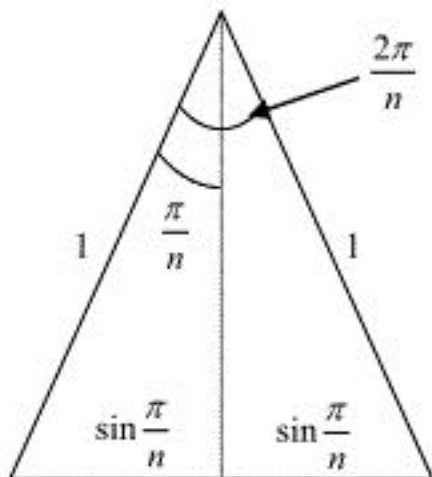
$$\begin{aligned} &(\log_2 x)^2+\log_2\frac{x}{2}<1 \\ \Leftrightarrow &(\log_2 x)^2+\log_2 x-\log_2 2<1 \\ \Leftrightarrow &(\log_2 x)^2+\log_2 x-2<0 \end{aligned}$$

であり、実数 t を用いて、 $t=\log_2 x$ とおくと、

$$\begin{aligned} &t^2+t-2<0 \\ \Leftrightarrow &(t+2)(t-1)<0 \\ \Leftrightarrow &-2<t<1 \\ \Leftrightarrow &-2<\log_2 x<1 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{4}<x<2 \end{aligned}$$

となる。これは真数条件を満たす。

(vi)



正 n 角形は、 n 個の合同な二等辺三角形にわけて考えることができる。二等辺三角形は、2 つの辺の長さが1で、その2つの辺のなす角が、 $\frac{2\pi}{n}$ であり、残りの1つの辺が正 n 角形の周の $\frac{1}{n}$ である。残りの1つの辺の長さは

$$2\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{n}=2\sin\frac{\pi}{n}$$

と求めることができるので、求める答えは、 $2n\sin\frac{\pi}{n}$ である。

(vii) 点A, Bを通る直線は、原点をO(0, 0, 0)とおくと、実数 t を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OA}}+t\overrightarrow{\text{AB}} &=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}+t\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\} \\ &=\begin{pmatrix} 3t+1 \\ 6t-1 \\ -3t+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書けるので、点Cを通るのは、

$$\begin{aligned} -3t+5 &=0 \\ \Leftrightarrow t &=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

のときである。このとき、 $a=6, b=9$ である。

(viii) 求める接点を (x_0, y_0) とおくと、この点における円の接線は

$$x_0x+y_0y=1$$

とかける。これが $y=kx+2$ と一致する (x_0, y_0) を求めればよい。 $y_0=0$ のとき明らかに不適であるから、 $y_0\neq 0$ として、

$$\begin{aligned} x_0x+y_0y &=1 \\ \Leftrightarrow y &=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{1}{y_0} \end{aligned}$$

となる。よってこれが $y=kx+2$ と一致するとき、

$$\begin{cases} k=-\frac{x_0}{y_0} \\ \frac{1}{y_0}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2x_0 \\ y_0=\frac{1}{2} \end{cases}$$

であり、このとき

$$x_0^2=1-y_0^2=\frac{3}{4}$$

となる。ここで、 $k > 0 \Leftrightarrow -2x_0 > 0$ より $x_0 < 0$ であるから、

$$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって求める接点の座標は、 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

II.

(i)

放物線 $y = -x^2 + ax - b$ が x 軸と相異なる二点で交わる条件は、二次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が相異なる二解を持つことであるから、この二次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4b &> 0 \end{aligned}$$

となる。 a, b は 1 以上 5 以下の自然数であるから、題意を満たす (a, b) の組は

$$(a, b) = (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)$$

の 10 通りである。

(答) 10 通り

(ii)

(i) の C が相異なる二点で交わる条件のもとで、その二点の x 座標は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

となる。(i) で求めた組のうち、これが整数となる (a, b) の組み合わせは

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4)$$

の 3 通りである。

(答) 3 通り

(iii)

$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4)$ のとき、それぞれの x 軸との交点の x 座標はそれぞれ

$$(a, b) = (3, 2) \text{ のとき } x = 1, 2$$

$$(a, b) = (4, 3) \text{ のとき } x = 1, 3$$

$$(a, b) = (5, 4) \text{ のとき } x = 1, 4$$

となる。よって C と x 軸の二つの交点間の距離は $(a, b) = (5, 4)$ のとき最大値

$$4 - 1 = 3$$

をとる。

(答) $(a, b) = (5, 4)$ のとき最大値: 3

(iv)

放物線 C と直線 $y = kx + 1$ が接する条件は、二次方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + ax - b &= kx + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (k - a)x + b + 1 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つことである。よって上式の判別式を D' とすれば

$$\begin{aligned} D' &= 0 \\ \Leftrightarrow (k - a)^2 - 4(b + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= a \pm 2\sqrt{b + 1} \end{aligned}$$

と k を a, b の式で表せる。ここで、 $2\sqrt{b+1}$ が整数となる 5 以下の自然数 b は 3 のみであるから、 k が自然数であることにより $b = 3$ である。 a も 5 以下の自然数であることに注意すると、 k は $(a, b) = (5, 3)$ のとき最大値 $5 + 2\sqrt{3+1} = 9$ をとる。

(答) $(a, b) = (5, 3)$ のとき最大値: 9

Ⅲ.

(i)

与えられた漸化式

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left\{3+(-1)^n\right\}a_n-1$$

を用いると

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=a_{2n+1}\\&=\frac{1}{2}\left\{3+(-1)^{2n}\right\}a_{2n}-1\\&=2c_n-1\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_n&=a_{2n}\\&=\frac{1}{2}\left\{3+(-1)^{2n-1}\right\}a_{2n-1}-1\\&=b_n-1\qquad\qquad\qquad\cdot\cdot\cdot\textcircled{2}\end{aligned}$$

となるので、定数 A, B, C, D の値は

$$A=2, B=-1, C=1, D=-1$$

である。

(答) $A=2, B=-1, C=1, D=-1$

(ii)

①, ②から c_n を消去すると、 b_{n+1} は

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=2c_n-1\\&=2(b_n-1)-1\\&=2b_n-3\end{aligned}$$

と表せる。

(答) $b_{n+1}=2b_n-3$

(iii)

(ii)より

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=2b_n-3\\&\Leftrightarrow b_{n+1}-3=2(b_n-3)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}b_n-3&=2^{n-1}(b_1-3)\\&\Leftrightarrow b_n=2^{n-1}(b_1-3)+3\end{aligned}$$

である。よって、 $b_1=a_1$ より数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}b_n&=2^{n-1}(a_1-3)+3\\&=2^{n-1}+3\end{aligned}$$

となる。また、②より数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}c_n&=b_n-1\\&=2^{n-1}+2\end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n=2^{n-1}+3, c_n=2^{n-1}+2$

(iv)

S_{2k} は

$$\begin{aligned}S_{2k}&=\sum_{m=1}^{2k}a_m\\&=\sum_{m=1}^k(a_{2m-1}+a_{2m})\\&=\sum_{m=1}^k(b_m+c_m)\end{aligned}$$

と表せるため、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned}S_{2k}&=\sum_{m=1}^k\left\{\left(2^{m-1}+3\right)+\left(2^{m-1}+2\right)\right\}\\&=\sum_{m=1}^k\left(2^m+5\right)\\&=\frac{2\left(1-2^k\right)}{1-2}+5k\\&=2^{k+1}+5k-2\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_{2k}=2^{k+1}+5k-2$