

1.

【解答】

$\boxed{\text{ア}}$ 5 $\boxed{\text{イ}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{\text{ウ}}$ -2 $\boxed{\text{エ}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{オ}}$ $1-\sqrt{3}$, 1 $\boxed{\text{カ}}$ $x^2-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{キ}}$ $-\frac{8}{3}$

$\boxed{\text{ク}}$ 0 $\boxed{\text{ケ}}$ 2 $\boxed{\text{コ}}$ $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【解説】

(i)

$p \leq q$ とすると、 p, q は自然数であるから

$$19 = p^3 + pq + q^2 \geq 3p^2$$
$$\therefore p = 1, 2$$

である。 $p = 1$ のとき

$$19 = p^3 + pq + q^2$$
$$\Leftrightarrow 19 = 1 + q + q^2$$
$$\Leftrightarrow q^2 + q = 18$$

であるが、 $q^2 + q$ が $q > 0$ について単調増加であることと、

$$3^2 + 3 = 12 < 18$$
$$4^2 + 4 = 20 > 18$$

より q は自然数とならず不適である。一方 $p = 2$ のとき

$$19 = p^3 + pq + q^2$$
$$\Leftrightarrow 19 = 4 + 2q + q^2$$
$$\Leftrightarrow q^2 + 2q - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow (q-3)(q+5) = 0$$
$$\therefore q = 3 \quad (\because q > 0)$$

となる。したがって $p \leq q$ のとき

$$(p, q) = (2, 3)$$

である。同様にして $q \leq p$ のとき

$$(p, q) = (3, 2)$$

であるから

$$p + q = 5$$

である。

(ii)

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos \theta - 1 &= 1 - \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= -\cos^2 \theta + \cos \theta \\ &= -\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、 $\sin^2 \theta + \cos \theta - 1$ の最大値は

$$\frac{1}{4} \left(\cos \theta = \frac{1}{2} \right)$$

であり、最小値は

$$-2 \quad (\cos \theta = -1)$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{4k-3} - \sqrt{4k+1}}{\{\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1}\} \{\sqrt{4k-3} - \sqrt{4k+1}\}} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{4k-3} - \sqrt{4k+1}}{-4} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{12} (\sqrt{4k+1} - \sqrt{4k-3}) \\ &= -\frac{1}{4} \{(\sqrt{5} - \sqrt{1}) + (\sqrt{9} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{45} - \sqrt{41}) + (\sqrt{49} - \sqrt{45})\} \\ &= -\frac{1}{4} (\sqrt{49} - \sqrt{1}) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

(iv)

真数条件より

$$-1 < x < 2$$

である。またこの条件のもと、

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}}(2-x) + \log_2(x+1) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2-x)^2 + \log_2(x+1) &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2(2-x)^2(x+1) &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow (2-x)^2(x+1) &= 2 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^3-3x^2+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1, 1 \pm \sqrt{3} \\ \therefore x = 1 - \sqrt{3}, 1 \quad (&\because -1 < x < 2) \end{aligned}$$

であるから、求める解は

$$x = 1 - \sqrt{3}, 1$$

である。

(v)

$$A = \int_0^1 f(t) dt \text{ とおくと}$$
$$f(x) = x^2 + 3A$$

である。よって

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (t^2 + 3A) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + 3At \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + 3A \\ \therefore A &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。したがって

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

である。

(vi)

$$\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{AD}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である。 A, B, C, D が同一平面上にあるとき、

$$\overrightarrow{\text{AD}} = s\overrightarrow{\text{AB}} + t\overrightarrow{\text{AC}}$$

とかけるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -s-t \\ 2s \\ 3t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (s, t, x) &= \left(2, \frac{5}{3}, -\frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

である。したがって

$$x = -\frac{8}{3}$$

である。

(vii)

$$x = 1+i \text{ が } x^3 - x^2 + ax + b = 0 \text{ を満たすから}$$
$$\begin{aligned} (1+i)^3 - (1+i)^2 + a(1+i) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (2i-2) - (2i) + a(1+i) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 + a + ai + b &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b - 2 &= ai \end{aligned}$$

である。いま a, b は実数であるから

$$a = 0 \text{ かつ } a + b - 2 = 0$$
$$\therefore a = 0, b = 2$$

である。

(viii)

余弦定理より

$$\begin{aligned} \text{CA}^2 &= \text{AB}^2 + \text{BC}^2 - 2\text{AB} \cdot \text{BC} \cos \text{B} \\ \Leftrightarrow \cos \text{B} &= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin \text{B} &= \sqrt{1 - \frac{1}{64}} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

である。よって三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{BC} \sin \text{A} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

である。

II.

(i)

2つの放物線 C_1, C_2 の $x=-1$ における y 座標が等しいことから、

$$(-1)^2 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$\Leftrightarrow a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、放物線 $C_1: y = x^2$ について、

$$y' = 2x$$

が成り立ち、方程式 $C_2: y = ax^2 + bx + c$ について、

$$y' = 2ax + b$$

が成り立つから、 C_1, C_2 の $x=-1$ における接線が直交するとき、

$$\{2 \cdot (-1)\} \{2a(-1) + b\} = -1$$

$$\Leftrightarrow b = 2a + \frac{1}{2}$$

となる。これを①に代入することで、

$$a - \left(2a + \frac{1}{2}\right) + c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = a + \frac{3}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad b = 2a + \frac{1}{2}, c = a + \frac{3}{2}$$

(ii)

2つの放物線 C_1, C_2 が $x = \frac{1}{4}$ で交わる時、 C_1, C_2 の $x = \frac{1}{4}$ における y 座標は等しいから、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = a\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(2a + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + \left(a + \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore a = -1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -1$$

(iii)

$a = -1$ のとき、放物線 C_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -1 \cdot x^2 + \left\{2 \cdot (-1) + \frac{1}{2}\right\}x + \left\{(-1) + \frac{3}{2}\right\} \\ &= -x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$y' = -2x - \frac{3}{2}$$

が成り立つ。従って、 C_2 の $x=-1$ における接線 l_1 、 $x = \frac{1}{4}$ における接線 l_2 の方程式はそれぞれ、

$$l_1: y = \left\{-2 \cdot (-1) - \frac{3}{2}\right\}\{x - (-1)\} + \left\{-(-1)^2 - \frac{3}{2}(-1) + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

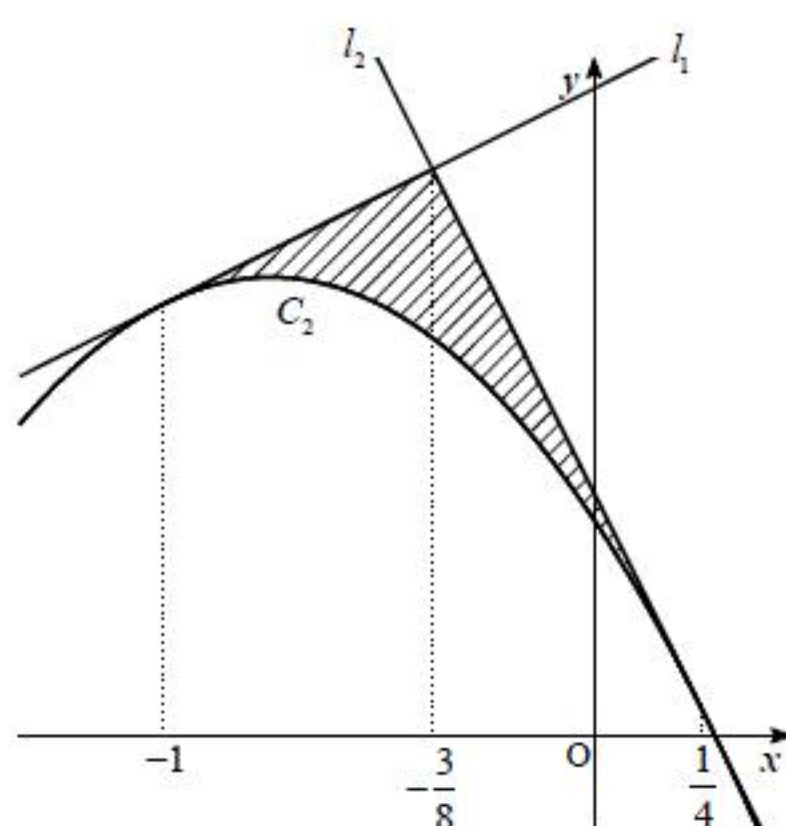
$$l_2: y = \left\{-2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right\}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \left\{-\frac{1}{4^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right\} = -2x + \frac{9}{16}$$

と表される。これら2直線の交点の x 座標は、

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2x + \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}$$

であるから、求める面積 S は以下の図の斜線部の面積となる。



ここで、 $x = -1, \frac{1}{4}$ のときの C_2 の y 座標はそれぞれ、

$$y = -(-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} = 1$$

$$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

であり、2直線 l_1, l_2 の交点の y 座標は、

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{3}{2} = \frac{21}{16}$$

である。従って、 x 軸、直線 $x = -1, x = -\frac{3}{8}, l_1$ で囲まれた台形の面積を S_1 、 x 軸、直線

$x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{8}, l_2$ で囲まれた台形の面積を S_2 とすると、求める面積 S は、

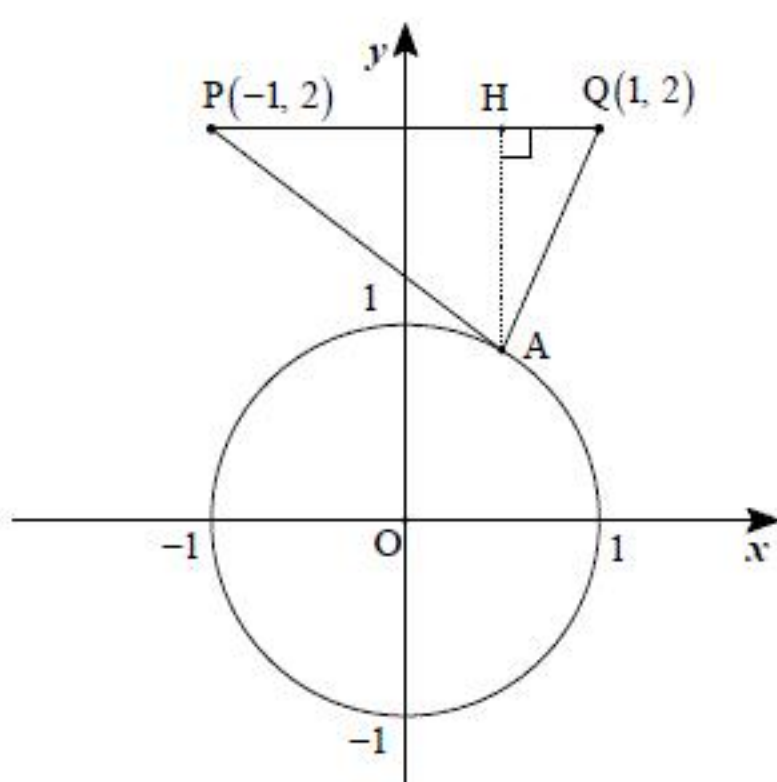
$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 - \int_{-1}^{\frac{1}{4}} \left(-x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{21}{16}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{21}{16}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) - \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{2}\right]_{-1}^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{125}{768} \end{aligned}$$

と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{125}{768}$$

Ⅲ.

(i)



x を 0 以上の整数とすると、点 A は点 $(1, 0)$ から反時計回りに $30x^\circ$ だけ回転させた点であるから、点 A は、

$$(1, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ (-1, 0), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

のいずれかに存在する。三角形 PQA の面積は点 A から直線 PQ におろした垂線の足を H とすると、

$$\frac{1}{2}PQ \cdot PH = PH$$

であるから、この面積が $\frac{3}{2}$ のとき、

$$PH = \frac{3}{2}$$

となればよい。したがって、求める点 A の座標は、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(ii)

$\angle APQ$ が直角となるとき、点 A が $x = -1$ 上に存在すればよいので、

$$A(-1, 0)$$

である。 $\angle AQP$ が直角となるとき、点 A が $x = 1$ 上に存在すればよいので、

$$A(1, 0)$$

である。 $\angle PAQ$ が直角となるとき、円周角の定理より点 A が $x^2 + (y-2)^2 = 1$ の円周上に存在すればよいので、

$$A(0, 1)$$

である。したがって、三角形 PQA が直角三角形となるような A の座標は、

$$(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$$

となる。

$$(\text{答}) (-1, 0), (1, 0), (0, 1)$$

(iii)

1 回目の試行で出た目を p , 2 回目の試行で出た目を q とすると、

$$2 \leq p+q \leq 12$$

であるから、(ii) より、2 回の試行の後、三角形 PQA が直角三角形となるためには、

$$\frac{p+q}{6}\pi = \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi \\ \Leftrightarrow p+q = 3, 6, 12$$

となればよい。このとき、

$$(p, q) = (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)$$

の 8 通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{2}{9}$$

(iv)

3 回目の試行で出た目を r とすると、

$$3 \leq p+q+r \leq 18$$

であるから、(i) より、2 回の試行の後、三角形 PQA の面積が $\frac{3}{2}$ となるためには、

$$\frac{p+q+r}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi \\ \Leftrightarrow p+q+r = 5, 13, 17$$

となればよい。このとき、 p, q, r を小さい順に l, m, n とおくと、

$$(l, m, n) = (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 6, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 5), (4, 4, 5), (5, 6, 6)$$

であるから、 (p, q, r) の個数は、

$$3! \cdot 2 + {}_3C_1 \cdot 6 = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \\ = 30 \quad [\text{個}]$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{5}{36}$$