

II.

(i)

並んでいる数字を小さい順に1, 2, 3, …項目と数えることにする。題意より、 k 項目の自然数は $4k+3$ と表される。

$n \geq 2$ において、 n 段目の左端の自然数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k+1 &= \frac{1}{2}n(n-1)+1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+1 \quad [\text{項目}]\end{aligned}$$

であり、これは $n=1$ においても成立する。よって、 n 段目の左から k 個目にある自然数は

$$4\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+k\right)+3 = 2n^2 - 2n+4k+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表されるから、6段目の左から4番目にある自然数は

$$2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 3 = 79$$

となる。

(答) 79

(ii)

①式より、 n 段目の左端の自然数 a_n は $2n^2 - 2n+7$ である。

(答) $a_n = 2n^2 - 2n+7$

(iii)

(ii)で求めた $2n^2 - 2n+7$ において、 $n=32$ とすれば1991となり、 $n=33$ とすれば2119となるから、2015は32段目にある。ここで、①式より

$$\begin{aligned}2 \cdot 32^2 - 2 \cdot 32 + 4k+3 &= 2015 \\ \therefore k &= 7\end{aligned}$$

となるから、2015は32段目の左から7番目にあることがわかる。

(答) 32段目の左から7番目

(iv)

n 段目には n 個の数字が並んでいる。よって、①式より

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n (2n^2 - 2n+4k+3) \\ &= 2n(n+1) + (2n^2 - 2n+3)n \\ &= 2n^3 + 5n\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_n = 2n^3 + 5n$

Ⅲ.

(i)

題意より、曲線 C について

$$y' = 3x^2 + 2x + a$$

であり、原点において C と直線 $l_1: y = -x$ が接することから、 C の原点における微分係数が -1 に等しい。よって

$$a = -1$$

を得る。

(答) $a = -1$

(ii)

C と l_1 を表す方程式から y を消去することにより

$$x^3 + x^2 - x = -x$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 (\because x \neq 0)$$

となる。よって、 P の座標は $l_1: y = -x$ に $x = -1$ を代入することにより $(-1, 1)$ となる。

(答) $(-1, 1)$

(iii)

C を表す関数について、その導関数は

$$y' = 3x^2 + 2x - 1$$

であるから、 P における C の接線 l_2 の方程式は

$$y = \{3 \cdot (-1)^2 + 2(-1) - 1\}(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = 1$$

となる。 C と l_2 を表す方程式から y を消去することにより

$$x^3 + x^2 - x = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 (\because x \neq -1)$$

となるから、 Q の座標は $l_2: y = 1$ に $x = 1$ を代入することにより $(1, 1)$ となる。

(答) $(1, 1)$

(iv)

(iii)と同様にして、 l_3 の方程式は

$$y = 4(x-1) + 1$$

$$= 4x - 3$$

となる。 C と l_3 を表す方程式から y を消去することにより

$$x^3 + x^2 - x = 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -3 (x \neq 1)$$

となるから、 R の座標は $l_3: y = 4x - 3$ に $x = -3$ を代入することにより $(-3, -15)$ となる。

(答) $(-3, -15)$

(v)

(ii)~(iv)より $\overline{PQ} = (2, 0)$, $\overline{PR} = (-2, -16)$ であるから、三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} |2 \cdot (-16) - (-2) \cdot 0| = 16$$

と求まる。

(答) 16