I

〔解答〕

(i) ア $\frac{6}{11}$　イ $-\frac{1}{11}$

(ii) ウ $\frac{1}{3}$　エ 2

(iii) オ -1　カ -1

(iv) キ $2\log a$

(v) ク $\frac{25}{216}$

(vi) ケ $\sqrt{2}$　コ -1

〔解説〕

(i)

$\overrightarrow{AH}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}\\&=p\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+q\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OA}\\&=\left(p+2q,\ -p+q+1,\ -q+1\right)\end{aligned}$$

となる。$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\&\Leftrightarrow p+2q-\left(-p+q+1\right)=0\\&\Leftrightarrow 2p+q=1 \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

となる。また，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\&\Leftrightarrow 2\left(p+2q\right)+\left(-p+q+1\right)-\left(-q+1\right)=0\\&\Leftrightarrow p+6q=0 \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

となる。①，②を連立して解くと

$$p=\frac{6}{11},\ q=-\frac{1}{11}$$

となる。

(ii)

$x\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}&x+3<5\left|x-1\right|\\&\Leftrightarrow x+3<5\left(x-1\right)\\&\therefore x>2\end{aligned}$$

となる。また，$x<1$ のとき

$$\begin{aligned}&x+3<5\left|x-1\right|\\&\Leftrightarrow x+3<-5\left(x-1\right)\\&\therefore x<\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって，求める x の範囲は

$$x<\frac{1}{3}\ \text{または}\ x>2$$

となる。

(iii)

2次方程式 $x^2+x+1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

であるから，異なる2つの虚数解をもつ。これらを α,β とおくと，

$$\begin{cases}\alpha^2+\alpha+1=0\\ \beta^2+\beta+1=0\end{cases}$$

が成り立つ。ここで，

$$\begin{aligned}\alpha^3-1&=\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\\&=0\\\therefore \alpha^3&=1\end{aligned}$$

であり，同様にして

$$\beta^3=1$$

が成り立つ。いま，多項式 $Q(x)$ を用いて

$$\left(x^5+1\right)^2=\left(x^2+x+1\right)Q(x)+Ax+B$$

とおき，$x=\alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned}&\left(\alpha^5+1\right)^2=A\alpha+B\\&\Leftrightarrow\left(\alpha^2+1\right)^2=A\alpha+B\\&\Leftrightarrow\left(-\alpha-1+1\right)^2=A\alpha+B\\&\Leftrightarrow\alpha^2=A\alpha+B\\&\Leftrightarrow A\alpha+B=-\alpha-1\end{aligned}$$

となり，同様に $x=\beta$ を代入すると，

$$A\beta+B=-\beta-1$$

となる。$\alpha\neq\beta$ であるから，これらの式を連立して解くと，

$$A=-1,\ B=-1$$

となる。

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\left(a^{2n}+a^{3n}\right)&=\frac{1}{n}\log\left\{a^{2n}\left(1+a^n\right)\right\}\\&=\frac{2n\log a+\log\left(1+a^n\right)}{n}\\&=2\log a+\frac{\log\left(1+a^n\right)}{n}\end{aligned}$$

となるので，$0<a<1$ より $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(a^{2n}+a^{3n}\right)&=2\log a+0\\&=2\log a\end{aligned}$$

となる。

(v)

出た目の和が9になるような目の組み合わせは，

$$(6,\ 2,\ 1),\ (5,\ 3,\ 1),\ (5,\ 2,\ 2),\ (4,\ 4,\ 1),\ (4,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$$

である。大中小のサイコロを区別して考えると，求める確率は

$$\frac{3!+3!+3+3+3!+1}{6^3}=\frac{25}{216}$$

となる。

(vi)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x-\theta\right)dx&=\left[\sin\left(x-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin\left(-\theta\right)\\&=\cos\theta+\sin\theta\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となる。$0\leqq\theta\leqq\pi$ より

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

となるので

$$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

となる。よって，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x-\theta\right)dx$ の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は -1 となる。

Ⅱ

(ⅰ)

数列$\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$は初項a，公比r $(0<r<1)$の等比数列であるから，無限級数

$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ はa, rを用いて

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}$$

と表せる。また，数列$\{b_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$を$b_n=a_n a_{n+1}$で定めると

$$a_n=ar^{n-1}$$
$$b_n=a_n a_{n+1}=a^2 r^{2n-1}$$

より，これは初項$a^2 r$，公比r^2 $(0<r^2<1)$の等比数列である。よって，無限級数$T=\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$

はa, rを用いて

$$T=\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{a^2 r}{1-r^2}$$

と表せる。

(答) $S=\dfrac{a}{1-r}, T=\dfrac{a^2 r}{1-r^2}$

(ⅱ)

$S=T$のとき，(ⅰ)の結果より

$$\frac{a}{1-r}=\frac{a^2 r}{1-r^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a(1+r)-a^2 r}{1-r^2}=0$$
$$\Leftrightarrow a(1+r-ar)=0 \ (\because 0<r<1)$$
$$\therefore a=1+\frac{1}{r} \ (\because a\neq 0)$$

とaはrを用いて表せることがわかる。

(答) $a=1+\dfrac{1}{r}$

(ⅲ)

$S=T$のとき，(ⅱ)の結果より，aはrを用いて$a=1+\dfrac{1}{r}$と表されるから，Sはrを用いて

$$S=\frac{1+\frac{1}{r}}{1-r}=\frac{1+r}{r(1-r)}$$

と表せることがわかる。

(答) $S=\dfrac{1+r}{r(1-r)}$

(ⅳ)

$S=T$のとき，(ⅲ)の結果より，Sはrを用いて$S=\dfrac{1+r}{r(1-r)}$と表されるから，関数$f(r)$を

$$f(r)=\frac{1+r}{r(1-r)} \ (0<r<1)$$

とおき，区間$0<r<1$における$f(r)$の最小値を求める。$f(r)$の導関数を計算すると

$$f'(r)=\frac{(1+r)'(r-r^2)-(1+r)(r-r^2)'}{\{r(1-r)\}^2}$$
$$=\frac{r^2+2r-1}{r^2(1-r)^2}$$
$$=\frac{\{r-(-1-\sqrt{2})\}\{r-(-1+\sqrt{2})\}}{r^2(1-r)^2}$$

となるから，$f(r)$の増減表は以下のようになる。

r	(0)	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$		↘	最小	↗	

よって，$f(r)$は$r=-1+\sqrt{2}$のとき最小となり，その最小値は

$$f(-1+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{(-1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{-4+3\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(4+3\sqrt{2})}{2}$$
$$=3+2\sqrt{2}$$

であることがわかる。

(答) Sは$r=-1+\sqrt{2}$のとき最小値$3+2\sqrt{2}$をとる

Ⅲ

(ⅰ)

$l: y=ax+b\ (a>0)$ とおく。直線 l が放物線 $C_1: y=x^2+1$ と接するとき，これらの式から y を消去して得られる2次方程式

$$x^2+1=ax+b$$
$$\Leftrightarrow x^2-ax+1-b=0$$

が重解を持つことから，判別式は0となる。よって，

$$a^2-4(1-b)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+4b-4=0 \qquad \cdots ①$$

となる。同様にして，直線 l が放物線 $C_2: y=-tx^2-1$ に接するとき，

$$-tx^2-1=ax+b$$
$$\Leftrightarrow tx^2+ax+b+1=0$$

の判別式は0となるので，

$$a^2-4t(b+1)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2-4tb-4t=0 \qquad \cdots ②$$

となる。したがって，①，②式より a^2 を消去すると，

$$4tb+4t=4-4b$$
$$\Leftrightarrow (t+1)b=1-t$$
$$\Leftrightarrow b=\frac{1-t}{1+t}\ (\because t>0)$$

となる。再び①式より

$$a^2=4-4b$$
$$=4-4\frac{1-t}{1+t}$$
$$=\frac{8t}{1+t}$$
$$\therefore a=2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}\ (\because a, t>0)$$

となる。以上より，直線 l の方程式は

$$y=2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{1-t}{1+t}$$

となる。

(答) $y=2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{1-t}{1+t}$

(ⅱ)

(ⅰ)の結果より，直線 l と放物線 C_1 の交点の座標は

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{1-t}{1+t} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2-2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+1-\frac{1-t}{1+t}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{2t}{1+t}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{\frac{2t}{1+t}}\right)^2=0$$
$$\therefore (x, y)=\left(\sqrt{\frac{2t}{1+t}}, \frac{1+3t}{1+t}\right)$$

となる。同様にして，直線 l と放物線 C_2 の交点の座標は

$$\begin{cases} y=-tx^2-1 \\ y=2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{1-t}{1+t} \end{cases}$$
$$\Rightarrow tx^2+2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+1+\frac{1-t}{1+t}=0$$
$$\Leftrightarrow tx^2+2\sqrt{\frac{2t}{1+t}}x+\frac{2}{1+t}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t}x+\sqrt{\frac{2}{1+t}}\right)^2=0$$
$$\therefore (x, y)=\left(-\sqrt{\frac{2}{t(1+t)}}, -\frac{3+t}{1+t}\right)$$

となる。

(答) $\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{2t}{1+t}}, \frac{1+3t}{1+t}\right), \mathrm{Q}\left(-\sqrt{\frac{2}{t(1+t)}}, -\frac{3+t}{1+t}\right)$

(ⅲ)

(ⅱ)の結果より，点Rの座標は，$t+1\neq 0$ であることに注意して

$$\left(\frac{1}{1+t}\left(\sqrt{\frac{2t}{1+t}}-t\sqrt{\frac{2}{t(1+t)}}\right), \frac{1}{1+t}\left(\frac{1+3t}{1+t}-t\cdot\frac{3+t}{1+t}\right)\right)=\left(0, \frac{1-t}{1+t}\right)$$

となる。

(答) $\mathrm{R}\left(0, \frac{1-t}{1+t}\right)$

(ⅳ)

(ⅲ)の結果より，点Rの y 座標は

$$\frac{1-t}{1+t}=\frac{2-(1+t)}{1+t}$$
$$=\frac{2}{1+t}-1$$

と変形できる。ここで，与えられた条件より $t>0$ であるから，

$$1+t>1$$
$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+t}<1$$
$$\Leftrightarrow -1<\frac{2}{1+t}-1<1$$

より，求める範囲は開区間 $(-1, 1)$ である。

(答) 開区間 $(-1, 1)$

Ⅳ

(ⅰ)

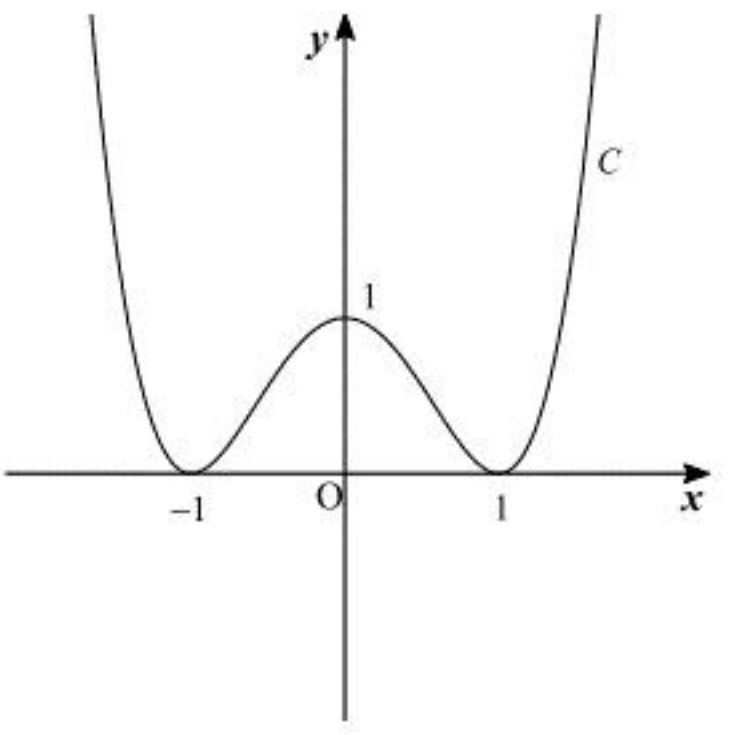
まず，曲線Cの概形を求める。$C:y=\left(x^2-1\right)^2$より，

$$\begin{aligned}y'&=2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\\&=4x(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

となる。よって$y=\left(x^2-1\right)^2$の増減は下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

また，$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)^2=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^2=\infty$であるから，グラフの概形は下のようになる。



グラフより，曲線Cと直線lの共有点が異なる4点となるようなkの範囲は$0<k<1$である。

(答)　$0<k<1$

(ⅱ)

$0<k<1$のとき，

$$\left(x^2-1\right)^2=k$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=\pm\sqrt{k}\ \left(\because k>0\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2=1\pm\sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{k}}\ \left(\because 0<k<1\right)\ \text{(複号任意)}$$

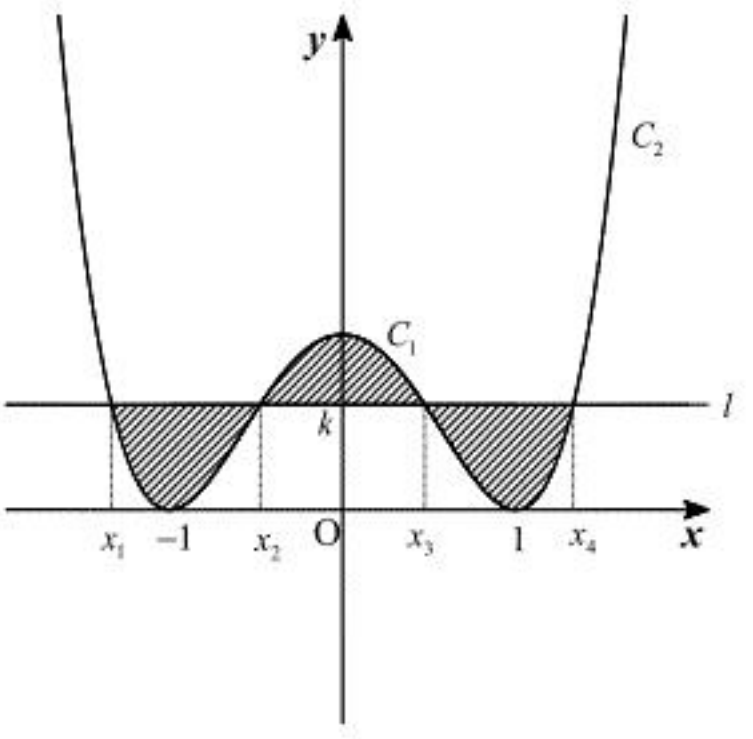
$$\therefore\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left(-\sqrt{1+\sqrt{k}},-\sqrt{1-\sqrt{k}},\sqrt{1-\sqrt{k}},\sqrt{1+\sqrt{k}}\right)$$

となる。

(答)　$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left(-\sqrt{1+\sqrt{k}},-\sqrt{1-\sqrt{k}},\sqrt{1-\sqrt{k}},\sqrt{1+\sqrt{k}}\right)$

(ⅲ)

下図斜線部の領域をy軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求めればよい。



曲線Cについて，$-1\leqq x\leqq 1$の部分をC_1，$x\leqq -1$または$1\leqq x$の部分をC_2とおく。このとき，

曲線C_1の方程式は，$x^2-1\leqq 0$より

$$x^2-1=-\sqrt{y}$$
$$\therefore x^2=1-\sqrt{y}$$

となる。一方，曲線C_2の方程式は，$x^2-1\geqq 0$より

$$x^2-1=\sqrt{y}$$
$$\therefore x^2=1+\sqrt{y}$$

となる。したがって，図より求める体積Vは

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^k\left(1+\sqrt{y}\right)dy-\pi\int_0^k\left(1-\sqrt{y}\right)dy+\pi\int_k^1\left(1-\sqrt{y}\right)dy\\&=\pi\left\{2\int_0^k\sqrt{y}dy+\int_k^1\left(1-\sqrt{y}\right)dy\right\}\\&=\pi\left\{2\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^k+\left[y-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_k^1\right\}\\&=\pi\left(2k\sqrt{k}-k+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{\pi}{3}\left(6k\sqrt{k}-3k+1\right)\end{aligned}$$

となる。

(答)　$\frac{\pi}{3}\left(6k\sqrt{k}-3k+1\right)$

(ⅳ)

(ⅲ)の結果を利用すると，

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dk}&=\frac{\pi}{3}\left(9\sqrt{k}-3\right)\\&=\pi\left(3\sqrt{k}-1\right)\end{aligned}$$

となる。$0<k<1$であるから，$\frac{dV}{dk}=0$となるのは，

$$3\sqrt{k}=1$$
$$\therefore k=\frac{1}{9}$$

のときである。よって，Vの増減は以下のようになる。

k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{9}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dk}$		$-$	0	$+$	
V		↘	$\frac{8}{27}\pi$	↗	

増減表より，Vは$k=\frac{1}{9}$で最小値$\frac{8}{27}\pi$をとることが分かる。

(答)　Vの最小値：$\frac{8}{27}\pi$，最小値を与えるk：$k=\frac{1}{9}$