

I

【解答】

- (i) ア $\frac{6}{11}$ イ $-\frac{1}{11}$
- (ii) ウ $\frac{1}{3}$ エ 2
- (iii) オ -1 カ -1
- (iv) キ $2\log a$
- (v) ク $\frac{25}{216}$
- (vi) ケ $\sqrt{2}$ コ -1

【解説】

(i)

$$\overline{AH} = p\overline{AB} + q\overline{AC} \text{ より}$$
$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{AH} - \overline{AO} \\ &= p(\overline{OB} - \overline{OA}) + q(\overline{OC} - \overline{OA}) + \overline{OA} \\ &= (p + 2q, -p + q + 1, -q + 1)\end{aligned}$$

となる。 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ より

$$\begin{aligned}\overline{OH} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow p + 2q - (-p + q + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2p + q &= 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、 $\overline{OH} \perp \overline{AC}$ より

$$\begin{aligned}\overline{OH} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(p + 2q) + (-p + q + 1) - (-q + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow p + 6q &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①、②を連立して解くと

$$p = \frac{6}{11}, q = -\frac{1}{11}$$

となる。

(ii)

$x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}x + 3 &< 5|x - 1| \\ \Leftrightarrow x + 3 &< 5(x - 1) \\ \therefore x &> 2\end{aligned}$$

となる。また、 $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}x + 3 &< 5|x - 1| \\ \Leftrightarrow x + 3 &< -5(x - 1) \\ \therefore x &< \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、求める x の範囲は

$$x < \frac{1}{3} \text{ または } x > 2$$

となる。

(iii)

2次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

であるから、異なる2つの虚数解をもつ。これらを α, β とおくと、

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ \beta^2 + \beta + 1 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned}\alpha^3 - 1 &= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) \\ &= 0 \\ \therefore \alpha^3 &= 1\end{aligned}$$

であり、同様にして

$$\beta^3 = 1$$

が成り立つ。いま、多項式 $Q(x)$ を用いて

$$(x^5 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)Q(x) + Ax + B$$

とおき、 $x = \alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\alpha^5 + 1)^2 &= A\alpha + B \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)^2 &= A\alpha + B \\ \Leftrightarrow (-\alpha - 1 + 1)^2 &= A\alpha + B \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= A\alpha + B \\ \Leftrightarrow A\alpha + B &= -\alpha - 1\end{aligned}$$

となり、同様に $x = \beta$ を代入すると、

$$A\beta + B = -\beta - 1$$

となる。 $\alpha \neq \beta$ であるから、これらの式を連立して解くと、

$$A = -1, B = -1$$

となる。

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log(a^{2^n} + a^{3^n}) &= \frac{1}{n} \log\{a^{2^n}(1 + a^n)\} \\ &= \frac{2n \log a + \log(1 + a^n)}{n} \\ &= 2 \log a + \frac{\log(1 + a^n)}{n}\end{aligned}$$

となるので、 $0 < a < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2^n} + a^{3^n}) &= 2 \log a + 0 \\ &= 2 \log a\end{aligned}$$

となる。

(v)

出た目の和が9になるような目の組み合わせは、

$$(6, 2, 1), (5, 3, 1), (5, 2, 2), (4, 4, 1), (4, 3, 2), (3, 3, 3)$$

である。大中小のサイコロを区別して考えると、求める確率は

$$\frac{3! + 3! + 3 + 3 + 3! + 1}{6^3} = \frac{25}{216}$$

となる。

(vi)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x - \theta) dx &= \left[\sin(x - \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \sin(-\theta) \\ &= \cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$$

となるので

$$-1 \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

となる。よって、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x - \theta) dx$ の最大値は $\sqrt{2}$ 、最小値は -1 となる。

II

(i)

数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は初項 a 、公比 r ($0 < r < 1$) の等比数列であるから、無限級数

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は a, r を用いて

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}$$

と表せる。また、数列 $\{b_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を $b_n = a_n a_{n+1}$ で定めると

$$\begin{aligned} a_n &= ar^{n-1} \\ b_n &= a_n a_{n+1} = a^2 r^{2n-1} \end{aligned}$$

より、これは初項 $a^2 r$ 、公比 r^2 ($0 < r^2 < 1$) の等比数列である。よって、無限級数 $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$

は a, r を用いて

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a^2 r}{1-r^2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a}{1-r}, T = \frac{a^2 r}{1-r^2}$$

(ii)

$S = T$ のとき、(i) の結果より

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{a^2 r}{1-r^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a(1+r) - a^2 r}{1-r^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a(1+r - ar) &= 0 \quad (\because 0 < r < 1) \\ \therefore a &= 1 + \frac{1}{r} \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

と a は r を用いて表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad a = 1 + \frac{1}{r}$$

(iii)

$S = T$ のとき、(ii) の結果より、 a は r を用いて $a = 1 + \frac{1}{r}$ と表されるから、 S は r を用いて

$$S = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1-r} = \frac{1+r}{r(1-r)}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1+r}{r(1-r)}$$

(iv)

$S = T$ のとき、(iii) の結果より、 S は r を用いて $S = \frac{1+r}{r(1-r)}$ と表されるから、関数 $f(r)$ を

$$f(r) = \frac{1+r}{r(1-r)} \quad (0 < r < 1)$$

とおき、区間 $0 < r < 1$ における $f(r)$ の最小値を求める。 $f(r)$ の導関数を計算すると

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{(1+r)'(r-r^2) - (1+r)(r-r^2)'}{\{r(1-r)\}^2} \\ &= \frac{r^2 + 2r - 1}{r^2(1-r)^2} \\ &= \frac{\{r - (-1 - \sqrt{2})\} \{r - (-1 + \sqrt{2})\}}{r^2(1-r)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(r)$ の増減表は以下のようになる。

r	(0)	...	$-1 + \sqrt{2}$	...	(1)
$f'(r)$		-	0	+	
$f(r)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって、 $f(r)$ は $r = -1 + \sqrt{2}$ のとき最小となり、その最小値は

$$\begin{aligned} f(-1 + \sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{(-1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-4 + 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(4 + 3\sqrt{2})}{2} \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S \text{ は } r = -1 + \sqrt{2} \text{ のとき最小値 } 3 + 2\sqrt{2} \text{ をとる}$$

Ⅲ

(i)

$l: y = ax + b$ ($a > 0$) とおく。直線 l が放物線 $C_1: y = x^2 + 1$ と接するとき、これらの式から y を消去して得られる 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= ax + b \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 - b &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つことから、判別式は 0 となる。よって、

$$\begin{aligned} a^2 - 4(1 - b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 4b - 4 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。同様にして、直線 l が放物線 $C_2: y = -tx^2 - 1$ に接するとき、

$$\begin{aligned} -tx^2 - 1 &= ax + b \\ \Leftrightarrow tx^2 + ax + b + 1 &= 0 \end{aligned}$$

の判別式は 0 となるので、

$$\begin{aligned} a^2 - 4t(b + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4tb - 4t &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、①、②式より a^2 を消去すると、

$$\begin{aligned} 4tb + 4t &= 4 - 4b \\ \Leftrightarrow (t + 1)b &= 1 - t \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1 - t}{1 + t} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。再び①式より

$$\begin{aligned} a^2 &= 4 - 4b \\ &= 4 - 4 \frac{1 - t}{1 + t} \\ &= \frac{8t}{1 + t} \\ \therefore a &= 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}} \quad (\because a, t > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、直線 l の方程式は

$$y = 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{1 - t}{1 + t}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y = 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{1 - t}{1 + t}$$

(ii)

(i)の結果より、直線 l と放物線 C_1 の交点の座標は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{1 - t}{1 + t} \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + 1 - \frac{1 - t}{1 + t} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{2t}{1 + t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\frac{2t}{1 + t}}\right)^2 &= 0 \\ \therefore (x, y) &= \left(\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}, \frac{1 + 3t}{1 + t}\right) \end{aligned}$$

となる。同様にして、直線 l と放物線 C_2 の交点の座標は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = -tx^2 - 1 \\ y = 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{1 - t}{1 + t} \end{cases} \\ \Rightarrow tx^2 + 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + 1 + \frac{1 - t}{1 + t} &= 0 \\ \Leftrightarrow tx^2 + 2\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}x + \frac{2}{1 + t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{t}x + \sqrt{\frac{2}{1 + t}}\right)^2 &= 0 \\ \therefore (x, y) &= \left(-\sqrt{\frac{2}{t(1 + t)}}, -\frac{3 + t}{1 + t}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad P\left(\sqrt{\frac{2t}{1 + t}}, \frac{1 + 3t}{1 + t}\right), Q\left(-\sqrt{\frac{2}{t(1 + t)}}, -\frac{3 + t}{1 + t}\right)$$

(iii)

(ii)の結果より、点 R の座標は、 $t + 1 \neq 0$ であることに注意して

$$\left(\frac{1}{1 + t}\left(\sqrt{\frac{2t}{1 + t}} - t\sqrt{\frac{2}{t(1 + t)}}\right), \frac{1}{1 + t}\left(\frac{1 + 3t}{1 + t} - t \cdot \frac{3 + t}{1 + t}\right)\right) = \left(0, \frac{1 - t}{1 + t}\right)$$

となる。

$$\text{(答)} \quad R\left(0, \frac{1 - t}{1 + t}\right)$$

(iv)

(iii)の結果より、点 R の y 座標は

$$\begin{aligned} \frac{1 - t}{1 + t} &= \frac{2 - (1 + t)}{1 + t} \\ &= \frac{2}{1 + t} - 1 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、与えられた条件より $t > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} 1 + t &> 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{1}{1 + t} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< \frac{2}{1 + t} - 1 < 1 \end{aligned}$$

より、求める範囲は开区間 $(-1, 1)$ である。

$$\text{(答)} \quad \text{开区间 } (-1, 1)$$