

2015年度

E_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 空間内の3点A, B, Cを $A(0, 1, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(2, 2, 0)$ とする.

実数 p, q を用いて点Hを $\overrightarrow{AH} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ で定める. 原点を $O(0, 0, 0)$ と
して, $\overrightarrow{OH}$ が $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であるとき, $p = \boxed{\text{ア}}$, $q = \boxed{\text{イ}}$ で
ある.

(ii) 不等式 $x + 3 < 5|x - 1|$ を満たす実数 x の範囲は, $x < \boxed{\text{ウ}}$ または
 $x > \boxed{\text{エ}}$ である.

(iii) 多項式 $(x^5 + 1)^2$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを $Ax + B$ とすると, 定数 A と
 B は $A = \boxed{\text{オ}}$, $B = \boxed{\text{カ}}$ である.

(iv) $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{3n}) = \boxed{\text{キ}}$ である.

(v) 大中小の3つのサイコロをふって, 出た目の和が9になる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である.

(vi) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x - \theta) dx$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ であり, 最小値は
 $\boxed{\text{コ}}$ である.

II. a は 0 でない実数, r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする. 初項 a , 公比 r の等比数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ に対し,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$$

とおく. このとき, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書きなさい.

(i) S と T をそれぞれ a と r を用いて表せ.

(ii) $S = T$ のとき, a を r を用いて表せ.

(iii) $S = T$ のとき, S を r を用いて表せ.

(iv) $S = T$ のとき, S の最小値と, 最小値を与える r の値をそれぞれ求めよ.

V

Ⅲ. t を正の実数とする. 放物線 $C_1: y = x^2 + 1$ と放物線 $C_2: y = -tx^2 - 1$ の両方に接する直線のうち傾きが正であるものを l とする. このとき, 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書きなさい.

(i) 直線 l の方程式を t を用いて表せ.

(ii) 直線 l と放物線 C_1 の接点を P , 直線 l と放物線 C_2 の接点を Q とする. 点 P と点 Q の座標をそれぞれ t を用いて表せ.

(iii) 線分 PQ を $t:1$ に内分する点 R の座標を t を用いて表せ.

(iv) 点 R の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ.

IV. k を実数とする. 曲線 $C: y = (x^2 - 1)^2$ と直線 $l: y = k$ について, 次の問(i) ~ (iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書きなさい.

- (i) 曲線 C と直線 l の共有点が異なる4点となるような k の値の範囲を求めよ.
- (ii) k が(i)で求めた範囲にあるとき, 曲線 C と直線 l の共有点の x 座標を小さい順に x_1, x_2, x_3, x_4 とする. x_1, x_2, x_3, x_4 をそれぞれ k を用いて表せ.
- (iii) k が(i)で求めた範囲にあるとき, 曲線 C と直線 l で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を k を用いて表せ.
- (iv) (iii)で求めた体積 V の最小値と, 最小値を与える k の値をそれぞれ求めよ.

【以下余白】

