

I.

【解答】

(i)	ア	イ
	1, 3, 4, 5, 7, 8, 9	2, 6
(ii)	ウ	
	$-6x+\frac{18}{5}$	
(iii)	エ	
	0, 1	
(iv)	オ	
	107	
(v)	カ	キ
	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
(vi)	ク	
	$0, \frac{2}{3}\pi$	
(vii)	ケ	コ
	64	32
(viii)	サ	
	$\frac{-2}{\sqrt{13}}$	

【解説】

(i) 問題文より、各集合の要素を書き並べて表すと

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2, 3, 6\} \\ \bar{A} &= \{4, 5, 7, 8, 9\} \\ B &= \{1, 3, 9\} \\ \bar{B} &= \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}\end{aligned}$$

となるから、集合 $\bar{A} \cup B$ および $A \cap \bar{B}$ の要素を書き並べて表すと

$$\begin{aligned}\bar{A} \cup B &= \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \\ A \cap \bar{B} &= \{2, 6\}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$\int_{-1}^2 f(t) dt = k$ とおくと、与式より

$$f(x) = -6x + 2k$$

であるから、

$$\begin{aligned}k &= \int_{-1}^2 (-6t + 2k) dt = \left[-3t^2 + 2kt \right]_{-1}^2 = 6k - 9 \\ \therefore k &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

となる。よって、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}f(x) &= -6x + 2k \\ &= -6x + \frac{18}{5}\end{aligned}$$

と求まる。

(iii)

2 次方程式 $x^2 + 2ax + a = 0$ が $x = -a$ を解にもつから、与えられた方程式に $x = -a$ を代入することで、 a の値は

$$\begin{aligned}(-a)^2 + 2a(-a) + a &= 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + a &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(a - 1) &= 0 \\ \therefore a &= 0, 1\end{aligned}$$

と求まる。

(iv)

2 進法において、右から n 桁目の数は 2^{n-1} を表すから

$$\begin{aligned}1101011_{(2)} &= 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0_{(10)} \\ &= 107_{(10)}\end{aligned}$$

となる。

(v)

与えられた方程式を変形すると

$$\begin{aligned}x^4 &= -9 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \pm 3i \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、 $x = a + bi$ から

$$x^2 = a^2 - b^2 + 2abi \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。 a, b は $a, b > 0$ を満たす実数であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を比較することにより

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \\ 2ab = 3 & \cdot \cdot \cdot \textcircled{4} \end{cases}$$

を得る。 $\textcircled{3}$ と $a, b > 0$ から

$$a = b \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{5}$$

となり、これを $\textcircled{4}$ に代入し解くと、

$$\begin{aligned}2a^2 &= 3 \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となる。これを $\textcircled{5}$ に代入すると、

$$b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

を得る。

(vi)

与えられた方程式を $\cos \theta$ について解くと

$$\begin{aligned}\cos 2\theta - \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos^2 \theta - 1) - \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{2}, 1\end{aligned}$$

となり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ から、 θ の値は

$$\theta = 0, \frac{2}{3}\pi$$

と求まる。

(vii)

真数条件より $x > 0$ である。 $\log_8 x$ は x について単調増加関数であるから、

$$\begin{aligned}-2 < \log_8 x < \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow 8^{-2} < x < 8^{\frac{5}{3}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{64} < x < 2^5 = 32\end{aligned}$$

となる。

(viii)

四角形 ABCD は平行四辺形であるから、 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ となるので

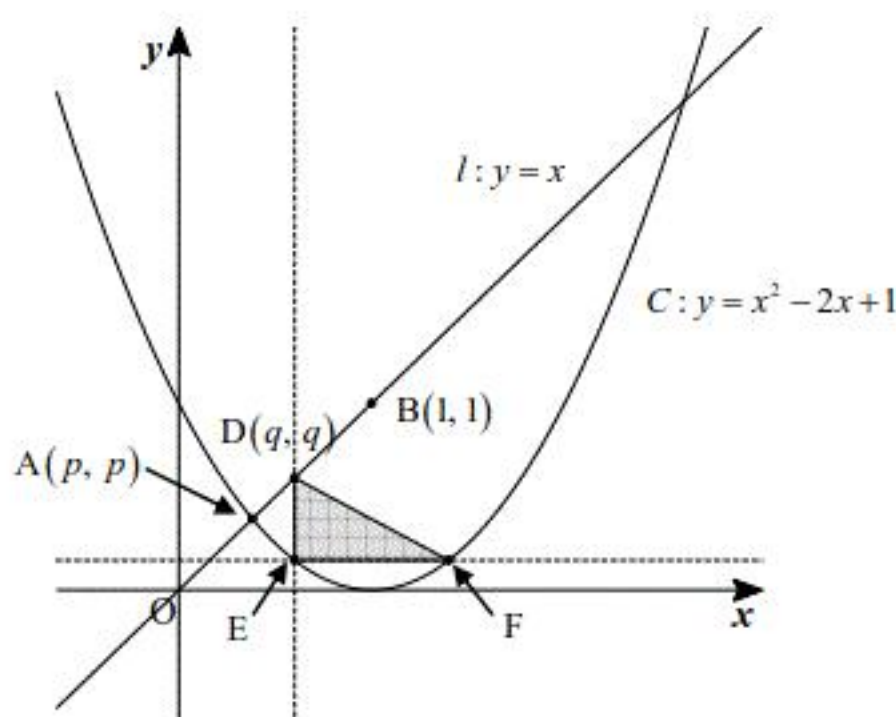
$$\overrightarrow{DA} = (-1, 5)$$

となる。また、 $\overrightarrow{DC} = (-4, -4)$ であるから、ベクトルの内積の定義式より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}}{\left| \overrightarrow{DC} \right| \left| \overrightarrow{DA} \right|} \\ &= \frac{(-4, -4) \cdot (-1, 5)}{\left| (-4, -4) \right| \left| (-1, 5) \right|} \\ &= \frac{-16}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

となる。

II.



(i)

p は 2 次方程式

$$x^2 - 2x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

の解のうち、小さい方であるから、

$$p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

(ii)

$C: y = (x-1)^2$ より、 C の軸は直線 $x=1$ である。直線 EF は C の軸に対して垂直であるから、

点 F は直線 $x=1$ に関して点 E と対称の位置にある。よって、 $q < 1$ に注意すると、点 E と C の軸の距離は $1-q$ である。以上より、 EF の長さは

$$2(1-q)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2(1-q)$$

(iii)

仮定より $\angle DEF = 90^\circ$ であるから、 $\triangle DEF$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF$$

となる。ここで $D(q, q)$, $E(q, q^2 - 2q + 1)$, $p < q < 1$ から

$$DE = q - (q^2 - 2q + 1) = -q^2 + 3q - 1$$

となるので、(ii)の結果と合わせて $\triangle DEF$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot (-q^2 + 3q - 1) \cdot 2(1-q) = q^3 - 4q^2 + 4q - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q^3 - 4q^2 + 4q - 1$$

(iv)

(iii)より、 $f(q) = q^3 - 4q^2 + 4q - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(q) &= 3q^2 - 8q + 4 \\ &= (3q - 2)(q - 2) \end{aligned}$$

となるから、 $f(q)$ の増減は以下の表のようになる。

q	p	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(q)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(q)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ただし、

$$p \left(= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) < \frac{3-2}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

であることを用いた。よって、 $\triangle DEF$ の面積は $q = \frac{2}{3}$ のとき最大となる。

$$(\text{答}) \quad q = \frac{2}{3}$$

(v)

(iv)より、求める値は

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{5}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{27}$$

Ⅲ.

(i)

Yに入る学生が決まれば、残りの学生がZに入ればよいから、Yに入る学生の選び方を考えることで

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

となる。

(答) 15 通り

(ii)

$(0, y, z)$ として可能な組は

$$(0, 2, 4), (0, 3, 3)$$

の2つである。 $(0, 3, 3)$ のときの学生の入り方の場合の数は

$${}_6C_3 = 20$$

となるから、(i)の結果も用いると、求める場合の数は

$$20 + 15 = 35$$

となる。

(答) $(0, 2, 4), (0, 3, 3)$, 35 通り

(iii)

$(1, y, z)$ として可能な組は

$$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2)$$

の3つである。よって求める場合の数は

$${}_6C_1({}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3) = 6 \cdot (5 + 10 + 10) = 150$$

となる。

(答) $(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2)$, 150 通り

(iv)

$(2, y, z)$ として可能な組は、 $y, z \neq 0$ に注意すると

$$(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)$$

の3つである。よって求める場合の数は

$${}_6C_2({}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3) = 15 \cdot (4 + 6 + 4) = 210$$

となる。

(答) $(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)$, 210 通り

(v)

空き部屋がある場合の (x, y, z) として可能な組は

$$(0, 2, 4), (0, 3, 3), (2, 0, 4)$$

の3つである。それぞれの場合について学生の入り方を考えると、 a, b が入る部屋が一緒にならないので、この二人の部屋の選び方で2通り、残りの学生の入り方はそれぞれ

${}_4C_1, {}_4C_2, {}_4C_1$ 通りであるから、求める場合の数は

$$2 \cdot ({}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_1) = 2 \cdot (4 + 6 + 4) = 28$$

となる。

(答) 28 通り