

I.

【解答】

(i)	ア	イ	(ii)	ウ	(iii)	エ	(iv)	オ
	$-\frac{5}{18}$	$\frac{23}{27}$		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		288		2
(v)	カ	(vi)	キ	(vii)	ク	(viii)	ケ	
	48		1440		11		75	

【解説】

(i)

与式より、

$$\begin{aligned}(\sin \theta+\cos \theta)^2 &=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \sin ^2 \theta+2 \sin \theta \cos \theta+\cos ^2 \theta &=\frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta+1 &=\frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &=-\frac{5}{18}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(\sin \theta+\cos \theta)^3 &=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ \Leftrightarrow \sin ^3 \theta+\cos ^3 \theta+3 \sin \theta \cos \theta(\sin \theta+\cos \theta) &=\frac{8}{27} \\ \Leftrightarrow \sin ^3 \theta+\cos ^3 \theta+3 \cdot\left(-\frac{5}{18}\right) \cdot \frac{2}{3} &=\frac{8}{27} \\ \Leftrightarrow \sin ^3 \theta+\cos ^3 \theta &=\frac{23}{27}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

切断された立体のうち頂点を含む側は切断前の高さ 1 の円錐と相似であり、相似比は $1: a$ であるため体積比は $1: a^3$ である。体積が 2 等分されるとき、その円錐の体積はもとの円錐の体積の $\frac{1}{2}$ であるから、

$$a^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{20}(2 k-7) &=2 \cdot \frac{(20+5)(20-5+1)}{2}-7(20-5+1) \\ &=400-112 \\ &=288\end{aligned}$$

となる。

(iv)

剰余の定理より

$$\begin{aligned}A &=(4-1)(4-2)(4-3) \\ &=6 \\ B &=(1-2)(1-3)(1-4) \\ &=-6 \\ C &=(2-3)(2-4)(2-1) \\ &=2\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}A+B+C &=6-6+2 \\ &=2\end{aligned}$$

となる。

(v)

$$x^2-9<0 \Leftrightarrow-3<x<3$$

より、

$$\begin{aligned}\int_{-2}^5\left|x^2-9\right| d x &=-\int_{-2}^3\left(x^2-9\right) d x+\int_3^5\left(x^2-9\right) d x \\ &=\left[9 x-\frac{1}{3} x^3\right]_{-2}^3+\left[\frac{1}{3} x^3-9 x\right]_3^5 \\ &=\left\{(27-9)-\left(-18+\frac{8}{3}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{125}{3}-45\right)-(9-27)\right\} \\ &=48\end{aligned}$$

となる。

(vi)

大人 1 人を固定すると、大人の座り方は

$$4!=24(\text { 通り })$$

である。子供は 5 人の大人たちの間に、1 つの間に子供が 2 人以上入らないように座ればよいので、子供の座り方は

$${}_5 \mathrm{P}_3=60(\text { 通り })$$

である。よって求める場合の数は

$$24 \cdot 60=1440(\text { 通り })$$

である。

(vii)

ガラス板を n 枚重ねたときの光の強さは 0.8^n であるから、

$$0.8^n<0.1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる最小の整数 n を求めればよい。①の両辺について、常用対数をとると

$$\begin{aligned}0.8^n &<0.1 \\ \Leftrightarrow n \log _{10} 0.8 &<\log _{10} 0.1 \\ \Leftrightarrow n \log _{10} \frac{2^3}{10} &<\log _{10} \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow n(3 \cdot 0.3010-1) &<-1\left(\because \log _{10} 2=0.3010\right) \\ \Leftrightarrow-0.097 n &<-1 \\ \Leftrightarrow n &>10.30 \cdots\end{aligned}$$

となるから、求める n の値は $n=11$ である。したがって、光の強さが当初の 1 割未満になるのは、ガラス板を 11 枚以上重ねたときである。

(viii)

B が池を 1 周したあとに A を初めて追い抜く地点の、スタート地点からの距離を $x(\mathrm{m})$ とすると、A の移動距離は $x(\mathrm{m})$ 、B の移動距離は $300+x(\mathrm{m})$ であるから、

$$\begin{aligned}x:(300+x) &=1: 5 \Leftrightarrow 5 x=300+x \\ \therefore x &=75(\mathrm{m})\end{aligned}$$

より求める距離は $75(\mathrm{m})$ である。

II.

(i)

a, b ともに $2c$ より長くないと直方体ができないため、

$$a > 2c \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b > 2c \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、 $\textcircled{2}$ と $ab=1$, $a > 0$, $c > 0$ より

$$b > 2c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} > 2c$$

$$\Leftrightarrow a < \frac{1}{2c} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ より、

$$2c < a < \frac{1}{2c}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 2c < a < \frac{1}{2c}$$

(ii)

直方体の辺の長さはそれぞれ $a-2c$, $b-2c$, c であるから、

$$V = (a-2c)(b-2c)c$$

$$= (a-2c)\left(\frac{1}{a}-2c\right)c$$

となる。

$$\text{(答)} \quad V = (a-2c)\left(\frac{1}{a}-2c\right)c$$

(iii)

$$V = (a-2c)\left(\frac{1}{a}-2c\right)c$$

$$= \left\{1+4c^2-2c\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}c$$

であるから、 $a+\frac{1}{a}$ が最小のとき V が最大になる。相加相乗平均の関係より

$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

であり、等号条件は

$$a=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a=1 (\because a>0)$$

であるため、 $a=1$ のとき V は最大値をとり、そのとき

$$V = (1-2c)^2 c$$

である。

$$\text{(答)} \quad V = (1-2c)^2 c$$

(iv)

$$M(c) = (1-2c)^2 c$$

$$= 4c^3 - 4c^2 + c$$

より、

$$M'(c) = 12c^2 - 8c + 1$$

$$= (2c-1)(6c-1)$$

となる。したがって、増減表は以下ようになる。

c	(0)	...	$\frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$M'(c)$	(+)	+	0	-	(0)
$M(c)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって $M(c)$ は $c=\frac{1}{6}$ のときに最大値をとり、

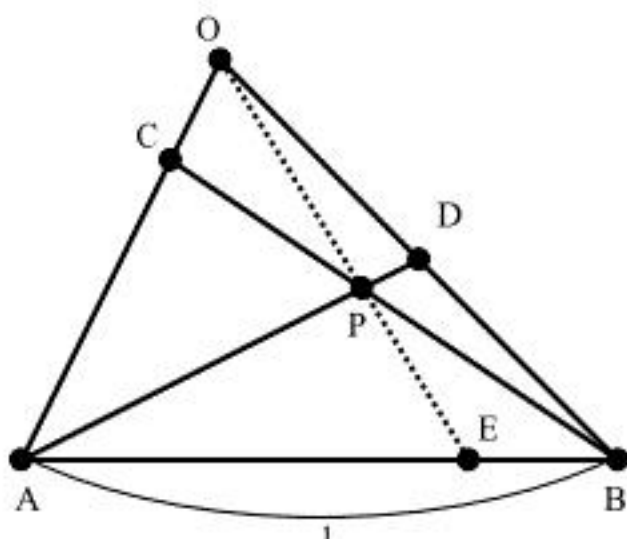
$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{6}\right) &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad c=\frac{1}{6}, \text{ そのとき } M(c)=\frac{2}{27}$$

Ⅲ.

(i)



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

であるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}$$

(ii)

△OAD に対して、メネラウスの定理を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= 6-6t \\ \Leftrightarrow t &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) t = \frac{6}{7}$$

(iii)

△OAB に対して、チェバの定理を用いることにより

$$\begin{aligned}\frac{OC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BD}{DO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} &= 3\end{aligned}$$

である。

$$(答) \frac{AE}{EB} = 3$$

(iv)

このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(1 - \frac{6}{7} \right) \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} \overrightarrow{OB} \right\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{7}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{3}{7}|\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0) \\ \Leftrightarrow -|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ より直線 OA, OB は垂直であるため、三平方の定理より

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①, ②より、

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{3}{4}, |\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{1}{4}$$

であるから、すなわち

$$OA = \frac{\sqrt{3}}{2}, OB = \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(答) OA = \frac{\sqrt{3}}{2}, OB = \frac{1}{2}$$

(v)

三角形 OAB の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

であり、三角形 OAB の各辺の長さの和は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

であるから、 r の値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(OA + OB + AB)r &= \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$