

1.

【解答】

	ア		イ		ウ		エ
(i)	3	(ii)	7	(iii)	$\frac{1}{2}$	(iv)	-1, 2
	オ		カ		キ		ク
(v)	$-\frac{1}{2}$	(vi)	$\frac{\sqrt{15}}{6}$	(vii)	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	(viii)	$\frac{4}{3}$

【解説】

(i)

赤を1面に使う場合、2面に使う場合、3面に使う場合それぞれ考えると、いずれも配色の仕方が1通りしかないので、計3通りである。

(ii)

n を $1 \leq n \leq 16$ を満たす整数とすると、 $5n$ を17で割ったときの余りをまとめると、以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
余り	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16

n	11	12	13	14	15	16
余り	4	9	14	2	7	12

したがって、求める n の値は $n=7$ である。

(iii)

与式より

$$A=\log_4\frac{120}{6\cdot 10}=\log_42=\log_44^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

である。

(iv)

$x^2+ kx-1=0$ において、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-k & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta=-1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。一方、 $x^2-(k+4)x+1=0$ において、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=k+4 & \cdots \textcircled{3} \\ \alpha^2\beta^2=1 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

となる。①、②、③より

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2&=k+4 \\ \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta&=k+4 \\ \Leftrightarrow k^2+2&=k+4 \\ \Leftrightarrow k^2-k-2&=0 \\ \Leftrightarrow (k-2)(k+1)&=0 \\ \therefore k&=-1, 2 \end{aligned}$$

となり、逆にこのとき、①、②、③、④を満たす。

(v)

実数 c, d, e を用いて、2次式を

$$f(x)=cx^2+dx+e$$

とすると

$$\begin{aligned} x^2f'(x)-f(x)&=x^3+ax^2+bx \\ \Leftrightarrow x^2(2cx+d)-(cx^2+dx+e)&=x^3+ax^2+bx \\ \Leftrightarrow 2cx^3+(d-c)x^2-dx-e&=x^3+ax^2+bx \end{aligned}$$

となるので、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} 2c=1 \\ d-c=a \\ -d=b \\ -e=0 \end{cases}$$

がわかる。これより

$$\begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ e=0 \\ b=-d \\ a+b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

が得られる。

(vi)

余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4} \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \sqrt{1-\cos^2 \angle A} \\ &= \frac{3}{16}\sqrt{15} \end{aligned}$$

となるので

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin \angle A = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \frac{3}{16}\sqrt{15} = \frac{3}{4}\sqrt{15} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。一方、内接円の半径を r とすると

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA) = \frac{9}{2}r \qquad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②より

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{15} &= \frac{9}{2}r \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{15}}{6} \end{aligned}$$

である。

(vii)

$\tan \theta = 2$ より

$$\begin{aligned} 1+\tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow 1+2^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

とわかる。

(viii)

関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x^2+x+1, \quad g(x)=x^3-2x^2+5x-2$$

とおき、曲線 $y=f(x), y=g(x)$ をそれぞれ F, G とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^3-x^2+x+1)-(x^3-2x^2+5x-2) \\ &= x^2-4x+3 \\ &= (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

となるから、曲線 F, G の上下関係は以下のようになる。

x	...	1	...	3	...
上下関係	F の方が上	交わる	G の方が上	交わる	F の方が上

したがって、曲線 F, G で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left\{ (x^3-x^2+x+1)-(x^3-2x^2+5x-2) \right\} dx &= -\int_1^3 (x-1)(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6}(3-1)^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

II.

(i)

$$\begin{cases} b_3 = b_2 + b_1 = a+1 \\ b_4 = b_3 + b_2 = 2a+1 \\ b_5 = b_4 + b_3 = 3a+2 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} b_3 = a+1 \\ b_4 = 2a+1 \\ b_5 = 3a+2 \end{cases}$$

(ii)

(i)の結果を用いて

$$\begin{cases} c_2 = b_3 b_1 - b_2^2 = (a+1) \cdot 1 - a^2 = -a^2 + a + 1 \\ c_3 = b_4 b_2 - b_3^2 = a(2a+1) - (a+1)^2 = a^2 - a - 1 \\ c_4 = b_5 b_3 - b_4^2 = (3a+2)(a+1) - (2a+1)^2 = -a^2 + a + 1 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} c_2 = -a^2 + a + 1 \\ c_3 = a^2 - a - 1 \\ c_4 = -a^2 + a + 1 \end{cases}$$

(iii)

$n \geq 3$ のとき、与式より

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n+1} b_{n-1} - b_n^2 \\ &= (b_n + b_{n-1}) b_{n-1} - (b_{n-1} + b_{n-2})^2 \\ &= (2b_{n-1} + b_{n-2}) b_{n-1} - (b_{n-1}^2 + 2b_{n-1} b_{n-2} + b_{n-2}^2) \\ &= 2b_{n-1}^2 + b_{n-1} b_{n-2} - (b_{n-1}^2 + 2b_{n-1} b_{n-2} + b_{n-2}^2) \\ &= b_{n-1}^2 - b_{n-1} b_{n-2} - b_{n-2}^2 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= b_n b_{n-2} - b_{n-1}^2 \\ &= (b_{n-1} + b_{n-2}) b_{n-2} - b_{n-1}^2 \\ &= -b_{n-1}^2 + b_{n-1} b_{n-2} + b_{n-2}^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} c_n = b_{n-1}^2 - b_{n-1} b_{n-2} - b_{n-2}^2 \\ c_{n-1} = -b_{n-1}^2 + b_{n-1} b_{n-2} + b_{n-2}^2 \end{cases} (n \geq 3)$$

(iv)

(iii)より、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n-1}^2 - b_{n-1} b_{n-2} - b_{n-2}^2 \\ &= -(-b_{n-1}^2 + b_{n-1} b_{n-2} + b_{n-2}^2) \\ &= -c_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = -c_{n-1} (n \geq 3)$$

(v)

(ii), (iv)より $n \geq 2$ に対して

$$|c_n| = |c_2| = |a^2 - a - 1|$$

となるから

$$\begin{aligned} |c_n| &= 1 \\ \Leftrightarrow |a^2 - a - 1| &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a^2 - a - 2 &= 0 \text{ または } a^2 - a = 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a+1) &= 0 \text{ または } a(a-1) = 0 \end{aligned}$$

となるが、 a は正の整数なので、求める値は

$$a = 1, 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 1, 2$$

Ⅲ.

(i)

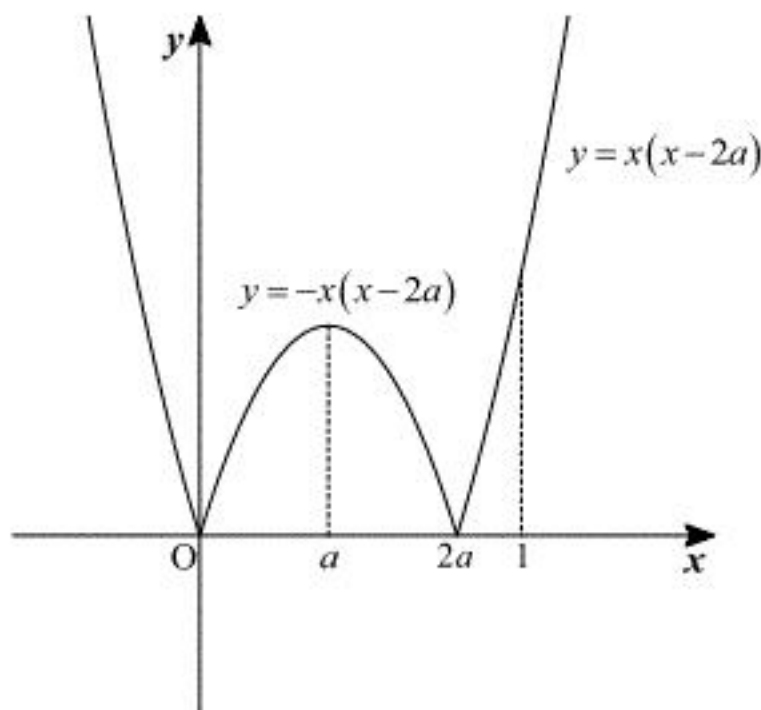
与えられた関数 $f(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 2ax| \\ &= |x(x - 2a)| \end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ より $a \geq 0$ であることに注意して、 $f(x)$ の絶対値を外すと

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-2a) & (x \leq 0, 2a \leq x) \\ x(x-2a) & (0 \leq x \leq 2a) \end{cases}$$

となる。したがって、 xy 平面上において $y=f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



ここで、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ より $2a \leq 1$ であることに注意すると、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値

は、 $f(a)(=a^2)$ と $f(1)(=1-2a)$ のうち、大きい方であることがわかる。

[1] $a = \frac{1}{4}$ のとき

$f(a) = \frac{1}{16}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ より、求める最大値は $f(1) = \frac{1}{2}$ である。

[2] $a = \frac{4}{9}$ のとき

$f(a) = \frac{16}{81}$, $f(1) = \frac{1}{9}$ より、求める最大値は $f(a) = \frac{16}{81}$ である。

(答) $a = \frac{1}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ ($x=1$), $a = \frac{4}{9}$ のとき最大値 $\frac{16}{81}$ ($x = \frac{4}{9}$)

(ii)

$f(a)=a^2$, $f(1)=1-2a$ であるから、 $f(a)=f(1)$ となる a の値である A は

$$\begin{aligned} f(A) &= f(1) \\ \Leftrightarrow A^2 &= 1-2A \\ \Leftrightarrow A^2 + 2A - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore A = -1 + \sqrt{2} \quad (\because 0 \leq A \leq \frac{1}{2})$$

と求まる。

(答) $-1 + \sqrt{2}$

(iii)

(i)における考察より、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は、 $f(a)(=a^2)$ と $f(1)(=1-2a)$ の

うち、大きい方である。ここで、 $f(a)-f(1)$ の値について

$$\begin{aligned} f(a) - f(1) &= a^2 + 2a - 1 \\ &= \{a - (-1 + \sqrt{2})\} \{a - (-1 - \sqrt{2})\} \\ &= (a - A)(a + 1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ であることに注意すると

$$0 \leq a \leq A \text{ のとき, } f(a) - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(a) \leq f(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$A \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } f(a) - f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(1) \leq f(a) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる。したがって、①より、 $0 \leq a \leq A$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$f(1)=1-2a$ である。

(答) $1-2a$

(iv)

(iii)の②より、 $A \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は $f(a)=a^2$ である。

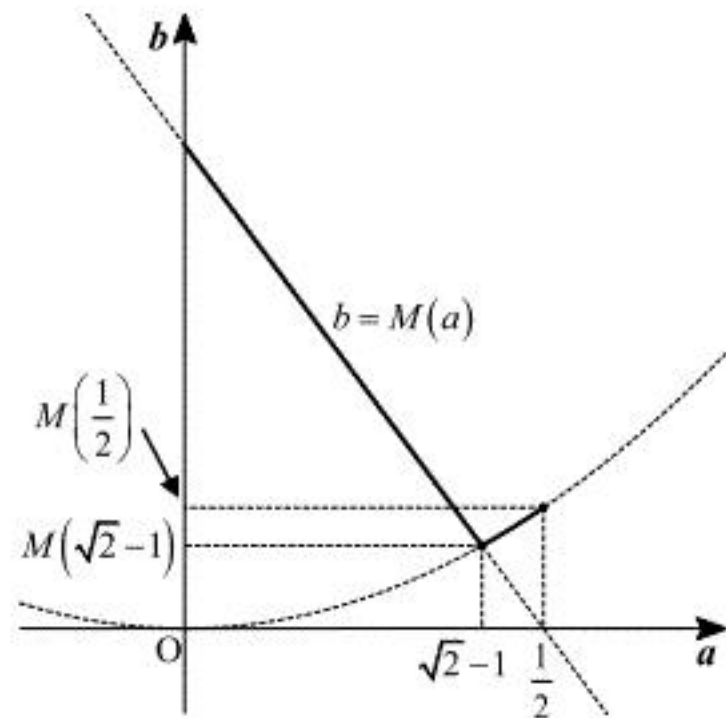
(答) a^2

(v)

$0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を a の関数として $M(a)$ で表わすとき、(ii), (iii), (iv)の結果より

$$M(a) = \begin{cases} 1-2a & (0 \leq a \leq \sqrt{2}-1) \\ a^2 & (\sqrt{2}-1 \leq a \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

となる。よって、 ab 平面に $b=M(a)$ のグラフを図示すると、以下の図の太線部のようになる。



したがって、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ における $M(a)$ の最小値は

$$M(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

と求まる。

(答) $3-2\sqrt{2}$