

1.

【解答】

(i)	ア	イ	ウ	エ
	8	7	4	1
(ii)	オ			
	1, 2			
(iii)	カ			
	$\frac{15}{8}$			
(iv)	キ			
	3			
(v)	ク			
	$\sqrt[3]{7}$			
(vi)	ケ			
	15			
(vii)	コ	サ		
	160	80		
(viii)	シ			
	$\frac{27}{112}$			

【解説】

【解説】

(i)

与えられた等式は、
$$m^2 - n^2 = 15$$
$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n) = 15 \quad \cdots \textcircled{1}$$
と変形できる。 m, n は自然数であることより
$$m+n > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$
であり、
$$m+n > m-n \quad \cdots \textcircled{3}$$
が成り立つ。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ を満たす $m+n, m-n$ の組は
$$(m+n, m-n) = (15, 1), (5, 3)$$
である。 $(m+n, m-n) = (15, 1)$ のとき、
$$m=8, n=7$$
であり、 $(m+n, m-n) = (5, 3)$ のとき、
$$m=4, n=1$$

である。以上より、題意を満たす自然数 (m, n) の組は

$$(m, n) = (8, 7), (4, 1)$$

である。

(ii)

与えられた方程式を変形すると、
$$x^3 - (3+a)x^2 + (2+3a)x - 2a = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(x-1)(x-2) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$
となる。 $a=1, 2$ のとき④の解は $x=1, 2$ となり異なる実数解は2個である。 $a \neq 1, 2$ のとき④は異なる3個の実数解を持つ。以上より、題意を満たす a の値は
$$a=1, 2$$
と求まる。

(iii)

与えられた方程式は、
$$4\cos\theta - \sin\theta = 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\theta\right) = 1$$
と変形できる。ここで、 α を

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数と定義すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\theta\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{17}\cos(\theta+\alpha) &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(\theta+\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

成り立つ。 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$ より

$$0 < \theta + \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

が成り立ち、これと $\cos(\theta+\alpha) > 0$ から

$$0 < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を得る。 $\cos(\theta+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ より、

$$\begin{aligned} \tan(\theta+\alpha) &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta+\alpha)} - 1} \left(\because 0 < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。 $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ であるから、

$$\tan\alpha = \frac{1}{4}$$

であり、

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \tan\{(\theta+\alpha) - \alpha\} \\ &= \frac{\tan(\theta+\alpha) - \tan\alpha}{1 + \tan(\theta+\alpha)\tan\alpha} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{4}} \\ &= \frac{15}{2} \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

(iv)

$t=2^*$ とおくと与えられた不等式は
$$t^2 - 2t - 48 < 0$$
$$\Leftrightarrow (t-8)(t+6) < 0$$
$$\therefore -6 < t < 8 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。 $t > 0$ より、⑤と合わせると

$$\begin{aligned} 0 < t < 8 \\ \Leftrightarrow x < 3 \end{aligned}$$

と求まる。

(v)

与えられた数をそれぞれ12乗すると、

$$\begin{aligned} (\sqrt{3})^{12} &= 3^6 = 9^3 = 729 \\ (\sqrt[3]{5})^{12} &= 5^4 = 25^2 = 625 \\ (\sqrt[4]{7})^{12} &= 7^3 = 343 \\ (\sqrt[5]{19})^{12} &= 19^2 = 361 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{7})^{12} &< (\sqrt[5]{19})^{12} < (\sqrt[3]{5})^{12} < (\sqrt{3})^{12} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{7} &< \sqrt[5]{19} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3} \end{aligned}$$

が成り立つので、与えられた実数のうち最小のものは $\sqrt[4]{7}$ である。

(vi)

大, 中, 小のさいころの出た目をそれぞれ a, b, c とおく。7個の○を並べ、そのすき間の2箇所に仕切りを入れて○を3つの組に区切ることを考えると、区切られたそれぞれの組に存在する○の個数を a, b, c の各値と対応させることができる。仕切りを入れる箇所の選び方は6つのすき間から2箇所を選ぶ選び方と等しいため、求める場合の数は、

$${}_6C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

である。

(vii)

食品X, Yをそれぞれ x, y g ずつ混ぜるとすると、混合した食品に栄養素aは

$$\frac{4}{100}x + \frac{2}{100}y \text{ (mg)}$$

含まれ、栄養素bは

$$\frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y \text{ (mg)}$$

含まれる。このときの費用は

$$\frac{80}{100}x + \frac{60}{100}y \text{ (円)}$$

である。したがって、

$$\begin{cases} \frac{4}{100}x + \frac{2}{100}y \geq 8 & \cdots \textcircled{6} \\ \frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y \geq 80 & \cdots \textcircled{7} \end{cases}$$

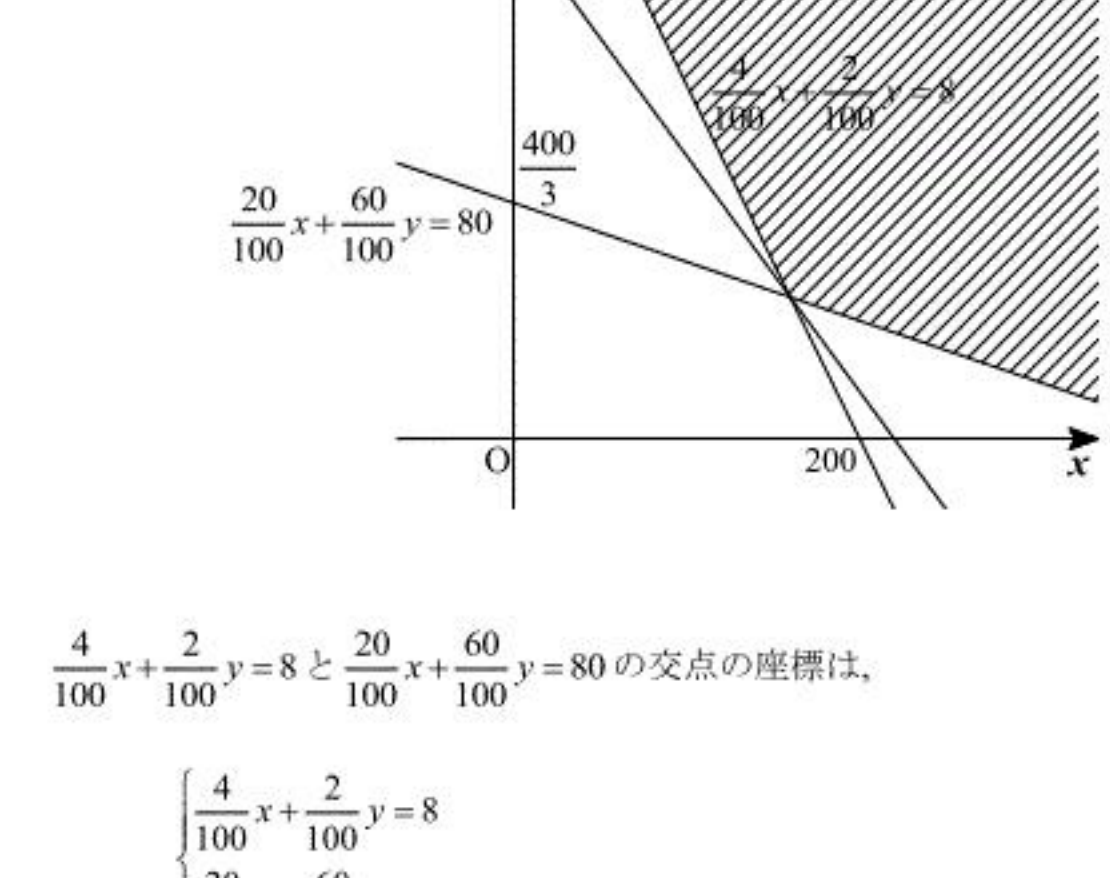
を満たす (x, y) のうち $\frac{80}{100}x + \frac{60}{100}y$ を最小とする (x, y) が求める (x, y) である。ここで、

$$\frac{80}{100}x + \frac{60}{100}y = k \text{ とおくと、}$$

$$\frac{80}{100}x + \frac{60}{100}y = k$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}k \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。⑥かつ⑦は以下の図の斜線部であり、⑧の直線が以下の図のように存在するとき k が最小となる。



$\frac{4}{100}x + \frac{2}{100}y = 8$ と $\frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y = 80$ の交点の座標は、

$$\begin{cases} \frac{4}{100}x + \frac{2}{100}y = 8 \\ \frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y = 80 \end{cases}$$

を計算して

$$x=160, y=80$$

であると分かる。直線 $\frac{80}{100}x + \frac{60}{100}y = k$ の k の値はこの点を通るときに最小となるため、費用

を最小にするには食品Xを160 g, Yを80 g 混ぜればよい。

(viii)

実数 a, b を用いて $\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{a}{(x-1)x} - \frac{b}{x(x+1)}$ と変形できるとすると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)x(x+1)} &= \frac{a}{(x-1)x} - \frac{b}{x(x+1)} \\ &= \frac{a(x+1) - b(x-1)}{(x-1)x(x+1)} \\ &= \frac{(a-b)x + a+b}{(x-1)x(x+1)} \end{aligned}$$

が成り立ち、これが x についての恒等式となるため、

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 8} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{7 \cdot 8} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{56} \right) \\ &= \frac{27}{112} \end{aligned}$$

と求まる。

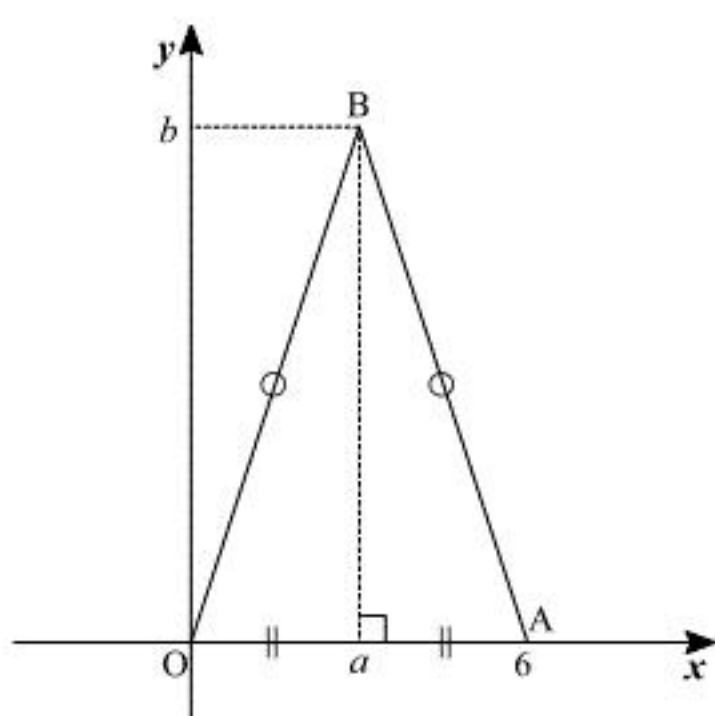
II.

(i)

3点 $O(0, 0, 0)$, $A(6, 0, 0)$, $B(a, b, 0)$ は xy 平面上にあるから、条件

$$AB = OB, \cos \angle OBA = \frac{4}{5}, b > 0$$

に注意して、位置関係を図示すると以下の図のようになる。



$\triangle OAB$ が $AB = OB$ の二等辺三角形であることより点 B は線分 OA の垂直二等分線上にあるから、 $a = 3$ であることがわかる。三角形 OAB に余弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} OA^2 &= AB^2 + OB^2 - 2AB \cdot OB \cos \angle OBA \\ \Leftrightarrow 6^2 &= \left(\sqrt{3^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{3^2 + b^2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3^2 + b^2}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 9 + b^2 &= 90 \\ \therefore b &= 9 \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

を得るから、点 B の座標は $(3, 9, 0)$ であることがわかる。また、線分 OB の長さは

$$\sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$$

であることがわかる。

(答) 線分 OB の長さ : $OB = 3\sqrt{10}$, 点 B の座標 : $B(3, 9, 0)$

(ii)

点 D は三角形 OAB の外心であるから、線分 OD の長さは三角形 OAB の外接円の半径の長さと一致する。したがって、三角形 OAB に正弦定理を用いることにより

$$\begin{aligned} \frac{OA}{\sin \angle OBA} &= 2 \cdot OD \\ \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} &= 2 \cdot OD \\ \therefore OD &= 5 \end{aligned}$$

であることがわかる。また、 $BD = OD = 5$ であり、点 D は線分 OA の垂直二等分線上にある三角形 OAB の内部の点であるから、(i)における図より点 D の座標は

$$D(3, 4, 0)$$

と求まる。

(答) 線分 OD の長さ : $OD = 5$, 点 D の座標 : $D(3, 4, 0)$

(iii)

点 C から xy 平面上に垂線を下したときの足を点 H とおくと、三平方の定理より

$$\begin{cases} AH^2 = AC^2 - CH^2 \\ BH^2 = BC^2 - CH^2 \\ OH^2 = OC^2 - CH^2 \end{cases}$$

となり、ここで $AC = BC = OC$ であるから

$$AH = BH = OH$$

となる。したがって、点 H は点 D と一致するから、点 C の座標について

$$C(3, 4, e)$$

であることがわかる。また、 $OC = 9$ であることから

$$\begin{aligned} OC^2 &= 9^2 \\ \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 + e^2 &= 81 \\ \therefore e &= 2\sqrt{14} \quad (\because e > 0) \end{aligned}$$

となるため、点 C の座標は

$$C(3, 4, 2\sqrt{14})$$

と求まる。

(答) 点 C の座標 : $C(3, 4, 2\sqrt{14})$

(iv)

三角形 OAB の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OB \cdot \sin \angle OBA &= \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{10})^2 \cdot \frac{3}{5} \\ &= 27 \end{aligned}$$

と求まる。また、三角錐 $OABC$ について、三角形 OAB を底面と考えたときの高さは、(iii)の結果より $2\sqrt{14}$ であるから、三角錐 $OABC$ の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 2\sqrt{14} \\ &= 18\sqrt{14} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $V = 18\sqrt{14}$

Ⅲ.

(i)

曲線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる 3 点で交わるのは、3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの正の実数解をもつことと同値である。 $f(x)=0$ は明らかに $x=4$ を解にもつから、条件は 2 次方程式

$$x^2-3x-c^2+3c=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が 4 でない異なる 2 つの正の実数解をもつことである。この方程式の判別式を D とすると

$$D=9-4(-c^2+3c)=4c^2-12c+9=(2c-3)^2>0 \left(\because c<\frac{3}{2} \right)$$

より、この方程式は異なる 2 つの実数解をもつ。それらを α, β ($\alpha<\beta$) とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-c^2+3c$$

がわかる。ここで、 α, β が正であるための条件は

$$\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$$

であるから

$$\begin{aligned} -c^2+3c &> 0 \\ \Leftrightarrow c(c-3) &< 0 \\ \therefore 0 &< c < 3 \end{aligned}$$

となる。また、 $\textcircled{1}$ は $x=4$ を解にもたないから

$$\begin{aligned} 4^2-12-c^2+3c &\neq 0 \\ \Leftrightarrow c^2-3c-4 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (c-4)(c+1) &\neq 0 \\ \therefore c &\neq 4, -1 \end{aligned}$$

となる。 $c<\frac{3}{2}$ と合わせて、求める c の値の範囲は

$$0 < c < \frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であることがわかる。

(答) $0 < c < \frac{3}{2}$

(ii)

$\textcircled{1}$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-c^2+3c)}}{2} \\ &= \frac{3 \pm |2c-3|}{2} \\ &= c, 3-c \quad (\because 2c-3 < 0) \end{aligned}$$

となる。ここで $c<\frac{3}{2}$ より $c<3-c$ である。また、 $c>0$ より $3-c<4$ である。よって $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解は小さい順に $c, 3-c, 4$ であるから、これが等差数列になるとき

$$\begin{aligned} c+4 &= 2(3-c) \\ \Leftrightarrow 3c &= 2 \\ \therefore c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。これは $\textcircled{2}$ を満たす。このとき $f(x)=0$ の解は

$$x = \frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 4$$

となる。

(答) $c = \frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 4$

(iii)

$f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解を小さい順に並べた $c, 3-c, 4$ が等比数列になるとき

$$\begin{aligned} 4c &= (3-c)^2 \\ \Leftrightarrow c^2-10c+9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (c-1)(c-9) &= 0 \\ \therefore c &= 1 \left(\because 0 < c < \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。このとき $f(x)=0$ の解は

$$x=1, 2, 4$$

となる。

(答) $c=1, x=1, 2, 4$

(iv)

C_1, C_2 の方程式をそれぞれ $y=f_1(x), y=f_2(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f_1(x)-f_2(x) &= (x-4) \left\{ \left(x^2-3x-\frac{4}{9}+2 \right) - \left(x^2-3x-1+3 \right) \right\} \\ &= \frac{4}{9}(4-x) \end{aligned}$$

となるから、 $x<4$ で C_1 は C_2 の上側にあり、 $x>4$ で C_1 は C_2 の下側にある。よって、曲線 C_1, C_2 と y 軸で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^4 \{f_1(x)-f_2(x)\} dx &= \frac{4}{9} \int_0^4 (4-x) dx \\ &= \frac{4}{9} \left[-\frac{1}{2}(4-x)^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{32}{9}$