

I.

【解答】

(i)	ア	イ
	2	8
(ii)	ウ	エ
	73	−367
(iii)	オ	カ
	$\frac{1}{5}$	$\sqrt{5}$
(iv)	キ	ク
	(1, 2, 0)	$\frac{\sqrt{15}}{15}$
(v)	ケ	コ
	5	$\frac{15}{28}$

【解説】

(i)

点 P と原点との距離を d として d^2 を計算すると、

$$\begin{aligned}d^2 &= (3\sin x + 5\sin y)^2 + (3\cos x + 5\cos y)^2 \\&= 9\sin^2 x + 30\sin x \sin y + 25\sin^2 y + 9\cos^2 x + 30\cos x \cos y + 25\cos^2 y \\&= 9 + 25 + 30(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\&= 34 + 30\cos(x - y)\end{aligned}$$

と表される。 $-1 \leq \cos(x - y) \leq 1$ であるから、 n を整数とすると

$$x - y = (2n - 1)\pi \Leftrightarrow x = y + (2n - 1)\pi$$

のとき、 d^2 は

$$\begin{aligned}d^2 &= 34 - 30 \\&= 4\end{aligned}$$

を最小値にとる。また、

$$x - y = 2n\pi \Leftrightarrow x = y + 2n\pi$$

のとき、 d^2 は

$$\begin{aligned}d^2 &= 34 + 30 \\&= 64\end{aligned}$$

を最大値にとる。以上より、 d の最小値は 2 であり最大値は 8 である。

(ii)

$$\begin{aligned}2016 &= 401 \cdot 5 + 11 && \cdots \text{①} \\401 &= 11 \cdot 36 + 5 && \cdots \text{②} \\11 &= 5 \cdot 2 + 1 && \cdots \text{③}\end{aligned}$$

であるから、①、②、③をそれぞれ変形すると、

$$\begin{aligned}11 &= 2016 - 401 \cdot 5 && \cdots \text{④} \\5 &= 401 - 11 \cdot 36 && \cdots \text{⑤} \\1 &= 11 - 5 \cdot 2 && \cdots \text{⑥}\end{aligned}$$

となる。⑥に⑤を代入すると、

$$\begin{aligned}1 &= 11 - (401 - 11 \cdot 36) \cdot 2 \\&= 11 - 401 \cdot 2 + 11 \cdot 72 \\&= 11 \cdot 73 - 401 \cdot 2\end{aligned}$$

となり、この式に④を代入すると、

$$\begin{aligned}1 &= (2016 - 401 \cdot 5) \cdot 73 - 401 \cdot 2 \\&= 2016 \cdot 73 - 401 \cdot 365 - 401 \cdot 2 \\&= 2016 \cdot 73 - 401 \cdot 367\end{aligned}$$

となる。したがって、方程式 $2016x + 401y = 1$ を満たす解の 1 つは、

$$(x, y) = (73, -367)$$

である。これは $0 < x < 401$ であるから題意を満たす。ここで、

$$\begin{aligned}2016x + 401y &= 1 && \cdots \text{⑦} \\2016 \cdot 73 + 401 \cdot (-367) &= 1 && \cdots \text{⑧}\end{aligned}$$

とおき、⑦、⑧の両辺の差をとると

$$\begin{aligned}2016(x - 73) + 401(y + 367) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2016(x - 73) &= -401(y + 367) && \cdots \text{⑨}\end{aligned}$$

となる。2016 と 401 は互いに素であるから、⑨の解は、整数 n を用いて

$$\begin{cases} x - 73 = 401n \\ y + 367 = -2016n \end{cases}$$

と表すことができる。したがって、方程式 $2016x + 401y = 1$ の一般解は

$$(x, y) = (73 + 401n, -367 - 2016n) \quad (n \text{ は整数})$$

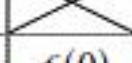
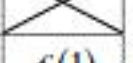
であるから、 $0 < x < 401$ を満たす解は $(x, y) = (73, -367)$ のみであることがわかる。

(iii)

$f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\&= \frac{\sqrt{1-x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)} \\&= \frac{1-x-4x}{2\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+2\sqrt{x})} \\&= \frac{1-5x}{2\sqrt{x(1-x)}(\sqrt{1-x}+2\sqrt{x})}\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\sqrt{x(1-x)} \geq 0$, $\sqrt{1-x} \geq 0$, $2\sqrt{x} \geq 0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	⋯	$\frac{1}{5}$	⋯	1
f'		+	0	−	
f	$f(0)$	↗	極大	↘	$f(1)$

以上より、関数 $f(x)$ は $x = \frac{1}{5}$ において最大値

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}} + 2\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

をとる。

(iv)

与えられた条件より、

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2)$$

であるから実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \\&= (4, -1, 3) + k(-2, 2, -2) \\&= (4 - 2k, -1 + 2k, 3 - 2k)\end{aligned}$$

と表される。C は xy 平面上の点であるから z 座標は 0 である。したがって、

$$\begin{aligned}3 - 2k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より C の座標は $(1, 2, 0)$ と求まる。これより、

$$\overrightarrow{OC} = (1, 2, 0)$$

であるからベクトルの内積の定義より、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{OC}|} \\&= \frac{-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} \\&= \frac{2}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} \\&= \frac{\sqrt{15}}{15}\end{aligned}$$

と求まる。これは $\cos\theta > 0$ を満たすため、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす。

(v)

白玉の個数を n 個とすると、取り出した玉が両方とも白である確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\text{C}_2}{{}_8\text{C}_2} &= \frac{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}}{\frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}} \\&= \frac{n(n-1)}{56}\end{aligned}$$

である。これが $\frac{5}{14}$ と等しいため、

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{56} &= \frac{5}{14} \\ \Leftrightarrow n(n-1) &= 20 \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-5)(n+4) &= 0 \\ \therefore n &= -4, 5\end{aligned}$$

となる。 $2 \leq n \leq 8$ であるから、袋の中の白玉は 5 個である。また、赤玉と白玉が 1 個ずつである確率は、

$$\frac{{}_3\text{C}_1 \cdot {}_5\text{C}_1}{{}_8\text{C}_2} = \frac{15}{28}$$

と求まる。

Ⅱ.

(i)

$$\begin{aligned}y &= -x^2 \\ y' &= -2x\end{aligned}$$

より、点 $P(t, -t^2)$ における C_1 の接線 l の傾きは $-2t$ であるから、 l の方程式は

$$\begin{aligned}y &= -2t(x-t) - t^2 \\ &= -2tx + t^2\end{aligned}$$

である。また、点 $P(t, -t^2)$ における C_1 の法線 m の傾きは $\frac{1}{2t} (> 0)$ であるから、 m の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2t}(x-t) - t^2 \\ &= \frac{1}{2t}x - t^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: y = -2tx + t^2, m: y = \frac{1}{2t}x - t^2 - \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}y &= x^2 + ax + b \\ y' &= 2x + a\end{aligned}$$

より、点 $P(t, -t^2)$ における C_2 の接線の傾きは $2t+a$ であるから、接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= (2t+a)(x-t) + (t^2 + at + b) \\ &= (2t+a)x - t^2 + b\end{aligned}$$

である。これは(i)で求めた l の方程式と一致するため、傾きと y 切片を比較することにより

$$\begin{aligned}\begin{cases} -2t = 2t + a \\ t^2 = -t^2 + b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4t \\ b = 2t^2 \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a = -4t, b = 2t^2$$

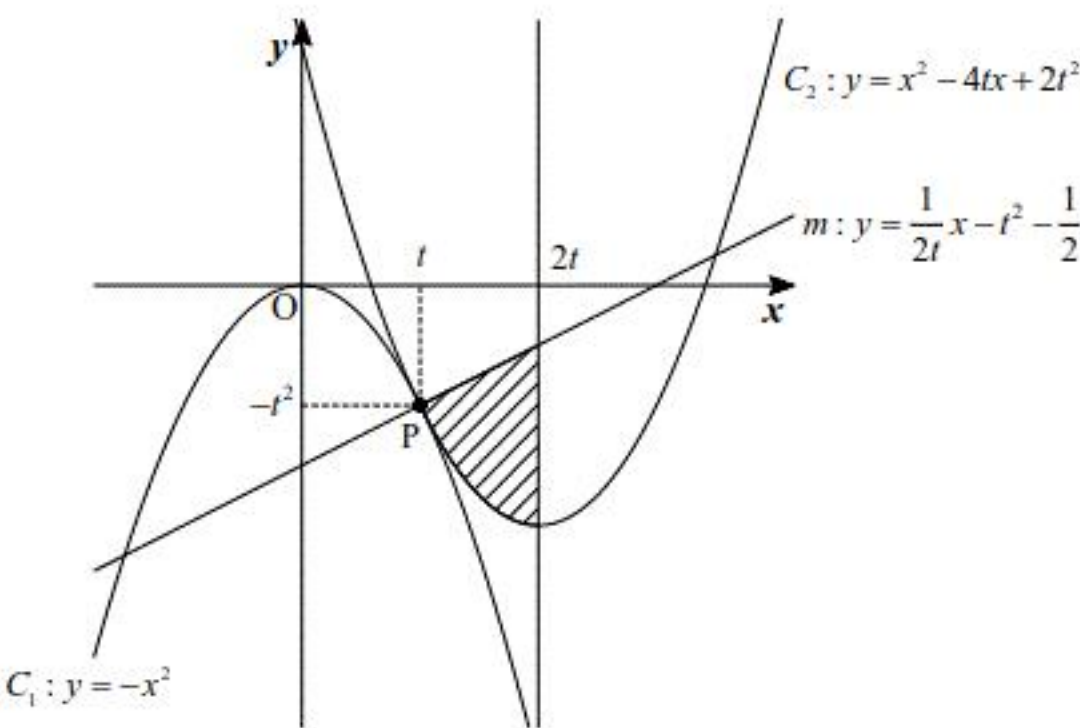
(iii)

※問題文の「 m と C_2 の軸および C_2 で囲まれる図形」という記述では軸の左側を指すのか右側を指すのかそれとも両方を指すのかわからないが、ここでは軸より左側を指すとして計算する。

(ii)より、 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 4tx + 2t^2 \\ &= (x-2t)^2 - 2t^2\end{aligned}$$

と表され、 C_2 の軸は $x = 2t$ である。よって、 m と C_2 の軸および C_2 で囲まれる図形は以下の図の斜線部である。



したがって、求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_t^{2t} \left\{ \left(\frac{1}{2t}x - t^2 - \frac{1}{2} \right) - (x^2 - 4tx + 2t^2) \right\} dx \\ &= \int_t^{2t} \left\{ -x^2 + \left(4t + \frac{1}{2t} \right)x - 3t^2 - \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \left(2t + \frac{1}{4t} \right)x^2 - \left(3t^2 + \frac{1}{2} \right)x \right]_t^{2t} \\ &= \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t$$

(iv)

l の方程式が $y = -2tx + t^2$ であることから $Q(0, t^2)$ であるため、三角形 OPQ の面積 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t \\ &= \frac{1}{2}t^3\end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t}{\frac{1}{2}t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2t^2} \right) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}$$

Ⅲ.

(i)

実数 c, d を用いて

$$\alpha = c + di$$

とおくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \alpha z_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + b_{n+1}i &= (c + di)(a_n + b_ni) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_n - b_n) + \frac{1}{2}(a_n + b_n)i &= (ca_n - db_n) + (da_n + cb_n)i \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。ここで a_n, b_n, c, d は実数より

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - b_n) = ca_n - db_n \\ \frac{1}{2}(a_n + b_n) = da_n + cb_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2c)a_n = (1-2d)b_n \\ (1-2d)a_n = (1-2c)b_n \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この式は $n=1$ のときも成り立つので、 $a_1=1, b_1=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1-2c=0 \\ 1-2d=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow c=d=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

とわかる。また、 $c=d=\frac{1}{2}$ のとき①の等式は成り立つので、

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

(ii)

(i)の結果より

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ \therefore |\alpha| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ に注意すると

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

(iii)

数学的帰納法を利用して、

$$r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}, \theta_n = \frac{n-1}{4}\pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$z_1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

より、②は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

②が成り立つ、すなわち

$$r_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1}, \theta_k = \frac{k-1}{4}\pi$$

であるとする、加法定理より

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \alpha z_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1} \left(\cos \frac{k-1}{4}\pi + i \sin \frac{k-1}{4}\pi \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{k-1}{4}\pi - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{k-1}{4}\pi \right) + i \left(\sin \frac{k-1}{4}\pi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{k-1}{4}\pi \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \left(\cos \frac{k}{4}\pi + i \sin \frac{k}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

と変形できる。よって $n=k+1$ のときも②は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について②が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}, \theta_n = \frac{n-1}{4}\pi$$

(iv)

(iii)の結果より

$$a_n = r_n \cos \theta_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \cos \frac{n-1}{4}\pi$$

と表される。よって

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \cos 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{5}{4}$$

(v)

整数 n に対して

$$\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos \theta$$

であることを利用すると、

$$\begin{aligned} &a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4k-4} \cos(k-1)\pi + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4k-3} \cos \frac{4k-3}{4}\pi + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4k-2} \cos(2k-1)\pi + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4k-1} \cos \frac{4k-1}{4}\pi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{4k-4} (-1)^{k-1} \left\{ \cos 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \cos \frac{3}{4}\pi \right\} \\ &= \left(-\frac{1}{4} \right)^{k-1} \cdot \frac{5}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{4N} a_n &= \sum_{k=1}^N (a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(-\frac{1}{4} \right)^{k-1} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{\frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^N \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^N \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^N a_n = 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^N$$

IV.

(i)

関数 $g(x)$ を $g(x) = (x-c) \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$ とおき、その原始関数の1つを $G(x)$ とおく。このとき、関数 $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ は

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^x g(t) dt \right)' \\ &= (G(x) - G(0))' \\ &= g(x) \\ &= (x-c) \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad F'(x) = (x-c) \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$$

(ii)

(i)の結果より、 $F'(x) < 0$ となる x の範囲は

$$\begin{aligned} F'(x) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-c) \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow \left[x-c < 0 \text{ かつ } \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) > 0 \right] &\text{または} \left[x-c > 0 \text{ かつ } \log \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) < 0 \right] \\ \Leftrightarrow \left[x < c \text{ かつ } x^2 - x + \frac{1}{2} > 1 \right] &\text{または} \left[x > c \text{ かつ } x^2 - x + \frac{1}{2} < 1 \right] \\ \Leftrightarrow \left[x < c \text{ かつ } x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} < x \right] &\text{または} \left[x > c \text{ かつ } \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right] \\ \therefore x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}, c < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \left(\because \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0 < c < 1 < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}, c < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(iii)

(ii)と同様に考えることで、 $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	c	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...
$F'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、極大値をとる x の値は $x=c$ であり、極小値をとる x の値は $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ であることがわかる。

$$(答) \quad \text{極大値をとる } x \text{ の値: } x=c, \text{ 極小値をとる } x \text{ の値: } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

(iv)

$c = \frac{1}{2}$ のとき、 $x \geq 0$ の範囲における $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...
$F'(x)$		+	0	-	0	+
$F(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

また、 $c = \frac{1}{2}$ のとき、 $s = t^2 - t + \frac{1}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \\ \begin{array}{c|cc} t & 0 & \rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \hline s & \frac{1}{2} & \rightarrow 1 \end{array} \end{aligned}$$

と対応するから、 $F \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$ の値は

$$F \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \cdot \log s ds = \left[\frac{s}{2} \cdot \log s \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{s} ds = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{2} - \left[\frac{s}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{4} (1 - \log 2)$$

と求まる。したがって、 $F(x)$ は $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4} (1 - \log 2) (< 0)$ をとることがわかる。

$$(答) \quad -\frac{1}{4} (1 - \log 2)$$