

I

【解答】

(i)	ア	
	$\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$	
(ii)	イ	7
(iii)	ウ	$\frac{40}{3}$
(iv)	エ	オ
	3	-1
(v)	カ	キ
	$\frac{23}{10}$	$\frac{9}{10}$
(vi)	ク	ケ
	-1	1
(vii)	コ	
	12	
(viii)	サ	
	3	

【解説】

(i)

与えられた方程式は

$$\begin{aligned}\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\theta\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \text{ または } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

と変形できる。 $\cos\theta = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi)\end{aligned}$$

となる。 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} &= \pi \quad (\because \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi) \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$$

と求まる。

(ii)

2本のくじの引き方は全部で ${}_{10}\text{C}_2$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。はずれくじは $10-n$ 本であるから、同時に2本のくじを引いたとき2本ともはずれである確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_{10-n}\text{C}_2}{{}_{10}\text{C}_2} &= \frac{\frac{(10-n)(9-n)}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{1}{90}(10-n)(9-n)\end{aligned}$$

と表される。この確率が $\frac{1}{15}$ となるときの、

$$\begin{aligned}\frac{1}{90}(10-n)(9-n) &= \frac{1}{15} \\ \Leftrightarrow (10-n)(9-n) &= 6 \\ \Leftrightarrow n^2 - 19n + 84 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-12)(n-7) &= 0 \\ \therefore n &= 7, 12\end{aligned}$$

が成り立つ。くじは全部で10本であることより、 n のとりうる範囲は $0 \leq n \leq 10$ であるから、

$$n = 7$$

と求まる。

(iii)

線分ADは $\angle\text{BAC}$ の二等分線であるから、

$$\begin{aligned}\text{BD}:\text{DC} &= \text{AB}:\text{AC} \\ &= 20:16 \\ &= 5:4\end{aligned}$$

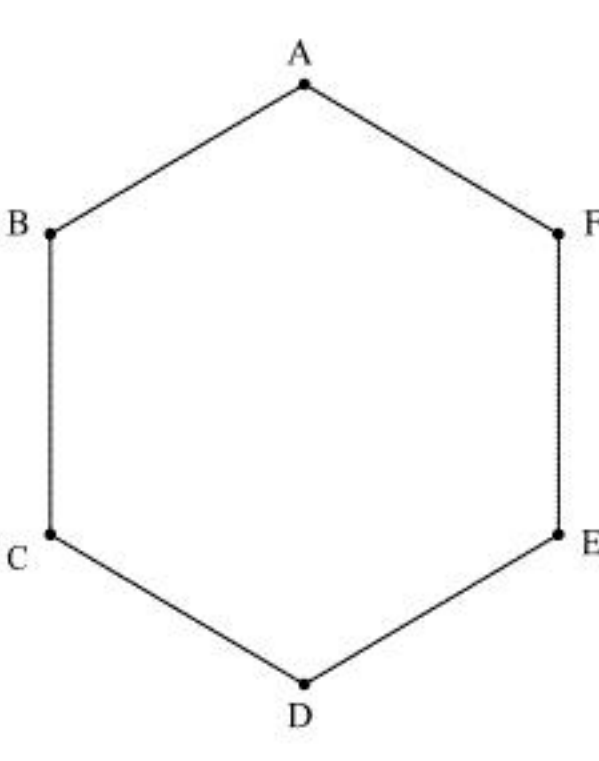
が成り立つ。 $\text{BC} = 24$ であるから、

$$\begin{aligned}\text{BD} &= 24 \cdot \frac{5}{9} \\ &= \frac{40}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(iv)

正六角形ABCDEFの図を以下に示す。



前図より、線分ADは線分BCに平行であり線分BCの2倍の長さであるから、

$$\begin{aligned}\overline{\text{AD}} &= 2\overline{\text{BC}} \\ &= 2(\overline{\text{AC}} - \overline{\text{AB}})\end{aligned}$$

となる。線分ACと線分DFは長さが等しく平行であるから、

$$\overline{\text{DF}} = -\overline{\text{AC}}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\overline{\text{AF}} &= \overline{\text{AD}} + \overline{\text{DF}} \\ &= 2(\overline{\text{AC}} - \overline{\text{AB}}) - \overline{\text{AC}} \\ &= \overline{\text{AC}} - 2\overline{\text{AB}}\end{aligned}$$

と表される。以上より、

$$\begin{aligned}\overline{\text{FB}} &= \overline{\text{AB}} - \overline{\text{AF}} \\ &= 3\overline{\text{AB}} - \overline{\text{AC}}\end{aligned}$$

と求まる。

(v)

与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}(3+i)(x+yi) &= 6+5i \\ \Leftrightarrow 3x+3yi+xi-y &= 6+5i \\ \Leftrightarrow (3x-y-6)+(x+3y-5)i &= 0\end{aligned}$$

となる。 x, y は実数であるから、

$$\begin{cases} 3x-y-6=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+3y-5=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を計算すると、

$$x = \frac{23}{10}, y = \frac{9}{10}$$

と求まる。

(vi)

直線 l に関して点 $(3, 2)$ と対称な点が $(1, 4)$ であるとき、直線 l の法線ベクトルは

$$(3, 2) - (1, 4) = (2, -2)$$

と平行であり、直線 l は2つの点の midpoint

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3)$$

を通る。よって、直線 l の方程式は

$$2(x-2) + (-2)(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-2y = -2$$

$$\therefore -x+y = 1$$

と求まる。

(vii)

975を素因数分解すると、

$$975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

となる。したがって、975の正の約数の個数は

$$(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12 \text{ (個)}$$

である。

(viii)

$f(x)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-3)(x+1)\end{aligned}$$

となるため、 $-1 \leq x \leq 5$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	...	3	...	5
f'	0	-	0	+	+
f	極大	↘	極小	↗	

したがって、関数 $f(x)$ が最小値を取るのは $x = 3$ のときである。

II.

(i)

$a_1 = a$ のとき、与えられた漸化式より、 a_2, a_3, a_4 は

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{2}{a} = \frac{a+2}{a} \\ a_3 &= 1 + 2 \cdot \frac{a}{a+2} = \frac{3a+2}{a+2} \\ a_4 &= 1 + 2 \cdot \frac{a+2}{3a+2} = \frac{5a+6}{3a+2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{a+2}{a}, a_3 = \frac{3a+2}{a+2}, a_4 = \frac{5a+6}{3a+2}$$

(ii)

$b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ により定めるとき、 b_1, b_2, b_3, b_4 は(i)より

$$\begin{aligned} b_1 &= (-1)^1 a_1 = -a \\ b_2 &= (-1)^2 a_1 a_2 = a+2 \\ b_3 &= (-1)^3 a_1 a_2 a_3 = -3a-2 \\ b_4 &= (-1)^4 a_1 a_2 a_3 a_4 = 5a+6 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = -a, b_2 = a+2, b_3 = -3a-2, b_4 = 5a+6$$

(iii)

数列 $\{a_n\}$ についての漸化式より、 b_{n+2} は b_{n+1}, b_n を用いて

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_{n+2} \\ &= (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \left(1 + \frac{2}{a_{n+1}} \right) \\ &= (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \cdot \frac{2}{a_{n+1}} \\ &= -(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_{n+1} + 2(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \\ &= -b_{n+1} + 2b_n \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+2} = -b_{n+1} + 2b_n$$

(iv)

(iii)で得られた数列 $\{b_n\}$ についての漸化式を変形すると

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= -b_{n+1} + 2b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - b_{n+1} &= -2(b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_{n+1} - b_n$ によって定めると、漸化式

$$c_{n+1} = -2c_n$$

が成立する。また、この数列の初項 c_1 は

$$c_1 = b_2 - b_1 = (a+2) - (-a) = 2a+2$$

であるから、この数列の一般項は

$$\begin{aligned} c_n &= (-2)^{n-1} c_1 \\ &= (-2)^{n-1} (2a+2) \\ &= -(-2)^n (a+1) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad c_n = -(-2)^n (a+1)$$

(v)

$a=1$ のとき、(iv)の結果より数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = (-2)^{n+1}$$

である。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= -a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k+1} \\ &= (-2)^0 + (-2)^1 + \sum_{k=2}^n (-2)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-2)^k \\ &= \frac{(-2)^0 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\ &= \frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n+1}\} \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも成立する。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

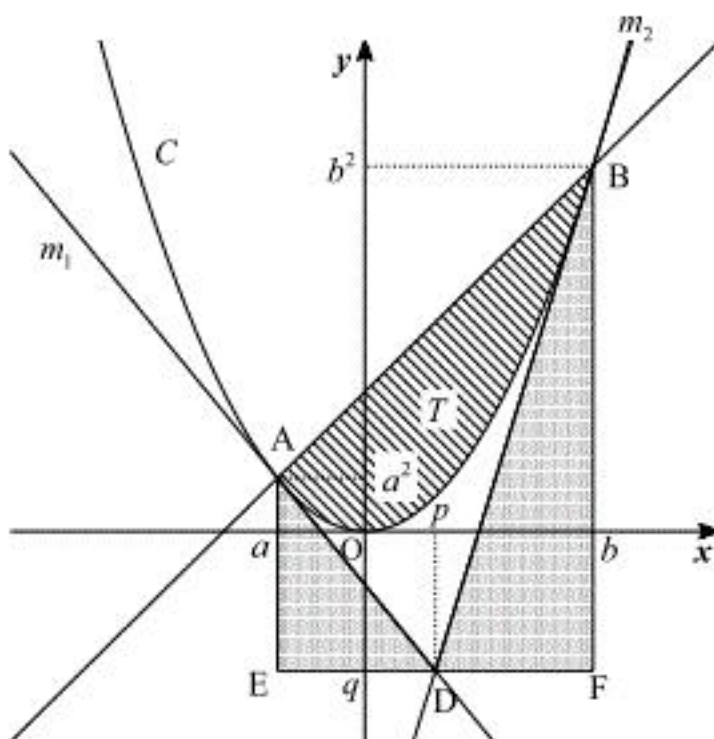
$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{b_n}{b_{n-1}} \\ &= -\frac{\frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n+1}\}}{\frac{1}{3} \{1 - (-2)^n\}} \\ &= -\frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)^n} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n+1}\}, a_n = -\frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)^n}$$

Ⅲ.

(i)



$y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから、点 A における放物線 C の傾きは $2a$ である。よって直線 m_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

と求められる。直線 m_2 の方程式についても同様に、

$$\begin{aligned} y - b^2 &= 2b(x - b) \\ \Leftrightarrow y &= 2bx - b^2 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad m_1: y = 2ax - a^2, m_2: y = 2bx - b^2$$

(ii)

放物線 C と直線 l の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= kx + k \\ \Leftrightarrow x^2 - kx - k &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2} \end{aligned}$$

である。よって $a < b$ より

$$a = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4k}}{2}, b = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4k}}{2}, b = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

(iii)

$D(p, q)$ は直線 m_1 および直線 m_2 上の点であるから、(i) の結果より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} q = 2ap - a^2 \\ q = 2bp - b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2ap - a^2 \\ 2ap - a^2 = 2bp - b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2ap - a^2 \\ 2p(a - b) = a^2 - b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2ap - a^2 \\ p = \frac{a + b}{2} \quad (\because a - b \neq 0) \end{cases} \\ \therefore (p, q) = \left(\frac{a + b}{2}, ab \right) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と求まる。ここで、 a, b は①の2解であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} a + b = k \\ ab = -k \end{cases}$$

となるので、これを②に代入して

$$(p, q) = \left(\frac{k}{2}, -k \right)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{k}{2}, q = -k$$

(iv)

(ii) の結果より、

$$b - a = \sqrt{k^2 + 4k} \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、

$$\begin{aligned} T &= \int_a^b (kx + k - x^2) dx \\ &= -\int_a^b (x - a)(x - b) dx \\ &= \frac{1}{6} (b - a)^3 \\ &= \frac{1}{6} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad T = \frac{1}{6} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k}$$

(v)

②, ③より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (p - a) (a^2 - q) + \frac{1}{2} (b - p) (b^2 - q) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a + b}{2} - a \right) (a^2 - ab) + \frac{1}{2} \left(b - \frac{a + b}{2} \right) (b^2 - ab) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{2} \cdot a(a - b) + \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{2} \cdot b(b - a) \\ &= \frac{1}{4} (b - a)^3 \\ &= \frac{1}{4} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k} \end{aligned}$$

と求まる。また、(iv) の結果より、

$$\frac{S}{T} = \frac{\frac{1}{4} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k}}{\frac{1}{6} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k}} = \frac{3}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{4} (k^2 + 4k) \sqrt{k^2 + 4k}, \frac{S}{T} = \frac{3}{2}$$