

2016年度

I 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～シに当てはまる数または式を記入せよ.

(i) 2つの自然数 m, n で等式 $m^2 - n^2 = 15$ を満たすのは,

$(m, n) = (\text{ア}, \text{イ})$ と $(m, n) = (\text{ウ}, \text{エ})$ である.

(ii) 方程式 $x^3 - (3+a)x^2 + (2+3a)x - 2a = 0$ の異なる実数解が2個であるときの実数 a の値をすべて挙げると オ である.

(iii) $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $4 \cos \theta - \sin \theta = 1$ が成り立つとき, $\tan \theta$ の値は カ である.

(iv) 実数 x に関する不等式 $2^{2x} - 2^{x+1} - 48 < 0$ を解くと $x < \text{キ}$ である.

(v) $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{19}$ のうち, 最小のものは ク である.

(vi) 大中小の3個のさいころを同時に1回投げるとき, 出た目の和が7になる場合の数は ケ 通りある.

(vii) 食品X, Yがある. 食品Xは100 gあたり80円で, 栄養素aを4 mg, 栄養素bを20 mg 含む. 食品Yは100 gあたり60円で, 栄養素aを2 mg, 栄養素bを60 mg 含む. 栄養素aを8 mg 以上, 栄養素bを80 mg 以上になるように食品X, Yを混合するとき, 費用を最小にするには食品Xを コ g と食品Yを サ g 混ぜればよい.

(viii) $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8}$ とするとき, S の値は シ である.

Ⅱ. a, b, c, d, e を実数とし, $b > 0, e > 0$ とする. 座標空間内の 3 点 $A(6, 0, 0)$, $B(a, b, 0)$, $C(c, d, e)$ と原点 $O(0, 0, 0)$ で作られる三角錐 $OABC$ において,

$$AB = OB, \cos \angle OBA = \frac{4}{5}, AC = BC = OC = 9$$

であるとする. このとき, 次の問 (i) ~ (iv) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) 線分 OB の長さを求めよ. さらに点 B の座標を求めよ.

(ii) 三角形 OAB の外心を D とする. 線分 OD の長さを求めよ. さらに, 点 D の座標を求めよ.

(iii) 点 C の座標を求めよ.

(iv) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

Ⅲ. 実数 c を $c < \frac{3}{2}$ とし, $f(x) = (x-4)(x^2 - 3x - c^2 + 3c)$ とする. このとき,

次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸が異なる3点で交わり, それら3つの交点の x 座標がすべて正となるときの c の値の範囲を求めよ.

(ii) (i)の3つの交点の x 座標を小さい順に並べると等差数列となるときの c の値を求めよ. また, このときの交点の x 座標をすべて求めよ.

(iii) (i)の3つの交点の x 座標を小さい順に並べると等比数列となるときの c の値を求めよ. また, このときの交点の x 座標をすべて求めよ.

(iv) (ii)の場合の曲線 $y = f(x)$ を C_1 とし, (iii)の場合の曲線 $y = f(x)$ を C_2 とする. 曲線 C_1, C_2 と, y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

【以下余白】

