

2016年度

## A<sub>a</sub> 数 学 問 題

### 注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。  
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i)  $x, y$  を実数とするとき, 座標平面上の点  $P(3 \sin x + 5 \sin y, 3 \cos x + 5 \cos y)$  と原点との距離の最小値は ア であり, 最大値は イ である.

(ii)  $2016x + 401y = 1$  を満たす整数  $x, y$  で  $0 < x < 401$  となるのは,  $x =$  ウ,  $y =$  エ のときである.

(iii)  $0 \leq x \leq 1$  のとき, 関数  $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$  は,  $x =$  オ において最大値 カ をとる.

(iv)  $O$  を原点とする座標空間内の2点  $A(4, -1, 3)$ ,  $B(2, 1, 1)$  を通る直線と  $xy$  平面の交点を  $C$  とするとき,  $C$  の座標は キ である. また, 直線  $AB$  と直線  $OC$  のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) とすると,  $\cos \theta =$  ク である.

(v) 袋の中に赤玉と白玉が合わせて8個入っている. この袋の中から2個の玉を同時に取り出すとき, 取り出した玉が両方とも白である確率が  $\frac{5}{14}$  である. このとき, 袋の中の白玉は ケ 個である. また, 取り出した玉を元に戻し, この袋からあらたに2個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉と白玉が1個ずつである確率は コ である.



Ⅱ.  $a, b$  を実数,  $t$  を正の実数とする.  $O$  を原点とする座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1: y = -x^2, C_2: y = x^2 + ax + b$$

が, 点  $P(t, -t^2)$  において同じ接線  $l$  を持つとする. また, 点  $P$  における  $C_1$  の法線を  $m$  とする. このとき, 次の間(i)~(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i)  $l$  と  $m$  の方程式をそれぞれ  $t$  を用いて表せ.

(ii)  $a, b$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ.

(iii)  $m$  と  $C_2$  の軸および  $C_2$  で囲まれる図形の面積  $S_1$  を  $t$  を用いて表せ.

(iv)  $l$  と  $y$  軸の交点を  $Q$  とし, 三角形  $OPQ$  の面積を  $S_2$  とするとき, 極限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2}$  の値を求めよ.



Ⅲ. 次の条件を満たす実数の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える.

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また,  $i$  を虚数単位とし, 複素数  $z_n$  を  $z_n = a_n + b_n i$  とする. このとき, 次の問(i) ~ (v)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i)  $z_{n+1} = \alpha z_n$  となる複素数  $\alpha$  を求めよ.

(ii) (i)で求めた複素数  $\alpha$  を極形式で  $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表すとき,  $r$  と  $\theta$  を求めよ. ただし,  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする.

(iii)  $n \geq 1$  に対して,  $z_n$  を極形式で  $z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$  と表すとき,  $r_n$  と  $\theta_n$  を  $n$  を用いて表せ. ただし,  $\theta_n \geq 0$  とする.

(iv)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  を求めよ.

(v)  $N$  を自然数とすると,  $\sum_{n=1}^{4N} a_n$  を  $N$  を用いて表せ.



IV.  $c$  を  $0 < c < 1$  を満たす実数とする. 関数

$$F(x) = \int_0^x (t - c) \log \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right) dt$$

について, 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i)  $F(x)$  の導関数  $F'(x)$  を求めよ.

(ii)  $F'(x) < 0$  となる  $x$  の値の範囲を  $c$  を用いて表せ.

(iii)  $F(x)$  が極大値をとる  $x$  の値と極小値をとる  $x$  の値をそれぞれ求めよ.

(iv)  $c = \frac{1}{2}$  のとき,  $x \geq 0$  の範囲における  $F(x)$  の最小値を求めよ.

【以下余白】