

I

【解答】

(i)	ア	
	24	
(ii)	イ	ウ
	−1	1
(iii)	エ	
	$\frac{1}{4}$	
(iv)	オ	カ
	$\frac{11}{4}$	$\sqrt{5}$
(v)	キ	ク
	−2	−1
(vi)	ケ	
	$-\frac{1}{2}x$	
(vii)	コ	サ
	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
(viii)	シ	
	$\frac{5}{16}$	

【解説】

(i)
 x で 109 を割ると 13 余るので、
 $109-13=96$
より、 x は 13 より大きい 96 の約数である。また、 x で 81 を割ると 9 余るので、
 $81-9=72$
より、 x は 9 より大きい 72 の約数である。96 と 72 の公約数で 13 より大きい数は 24 のみであるから、 x は 24 である。

(ii)
$$\begin{aligned}\frac{-2}{x^2+1}+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}&=\frac{-2(x^2-1)+a(x^2+1)(x-1)+b(x^2+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}\\&=\frac{(a+b)x^3+(-a+b-2)x^2+(a+b)x+2-a+b}{x^4-1}\end{aligned}$$

となり、これが x の値に関わらず、 $\frac{4}{x^4-1}$ に等しくなるには、

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b-2=0 \\ 2-a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

となれば良い。

(iii)
$$2\sin\theta=4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}&=\cos\frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow\left(4\sin\frac{\theta}{2}-1\right)\cos\frac{\theta}{2}&=0\end{aligned}$$

である。ここで、 $0\leq\theta<\pi$ より、 $0<\cos\frac{\theta}{2}\leq 1$ であるから、

$$4\sin\frac{\theta}{2}-1=0\Leftrightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}$$

となる。

(iv)
 $X=\log_3x$ とおくと、 x が $x>0$ の範囲を動くとき、 X は実数全体を動く。よって、

$$X^2-X+3=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

であるから、 $X=\frac{1}{2}$ のとき、すなわち $x=\sqrt{5}$ のとき最小値 $\frac{11}{4}$ をとる。

(v)
$$i^3=-i, i^2=-1, \frac{1}{i}=-i, \frac{1}{i^2}=-1$$

であるから、

$$i^3+i^2+i+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=-2-i$$

となる。

(vi)
$$\int_0^3tf(t)dt=A$$

とおくと、

$$f(x)=(4+A)x\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^3tf(t)dt&=\int_0^3(4+A)t^2dt \\ &=\left[\frac{4+A}{3}t^3\right]_0^3 \\ &=9(4+A)\end{aligned}$$

となるが、これは A に等しいので、

$$A=9(4+A)\Leftrightarrow A=-\frac{9}{2}$$

を得る。よって①より、 $f(x)=-\frac{1}{2}x$ となる。

(vii)
点 C は zx 平面上にあるから、 $b=0$ である。よって、点 C は AB を 4:1 に外分する点となることから、

$$\begin{aligned}a&=\frac{4\cdot 1+2\cdot(-1)}{4+(-1)}=\frac{2}{3} \\ c&=\frac{4\cdot 1}{4+(-1)}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。

(viii)
5 秒後に $x=1$ に存在するには、+1 に 3 回、−1 に 2 回移動すればよい。よって、求める確率は、

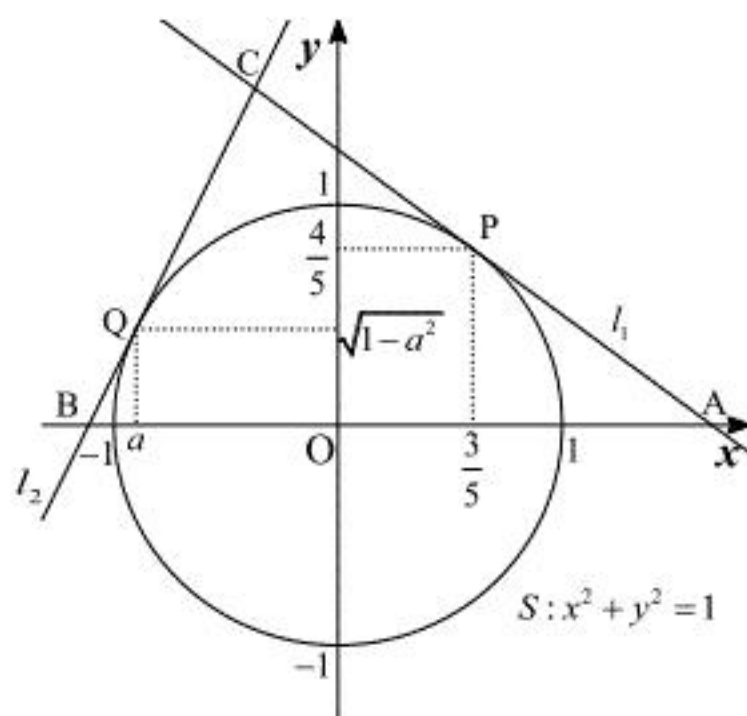
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_5C_3=\frac{5}{16}$$

となる。

II

(i)

問題文より、 S, ℓ_1, ℓ_2 等は下図のような配置になる。



一般に、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$x_1 x + y_1 y = 1$$

とかける。よって、点 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ における S の接線 ℓ_1 の方程式は

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、点 A は ℓ_1 と x 軸との交点であるから、その x 座標は①式に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x &= 1 \\ \therefore x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ となる。

$$(\text{答}) \ell_1: \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1, A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

(ii)

ℓ_2 は S の点 $Q(a, \sqrt{1-a^2})$ における接線であるから、その方程式は

$$ax + \sqrt{1-a^2}y = 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ell_2: ax + \sqrt{1-a^2}y = 1$$

(iii)

ℓ_1 の傾きは $-\frac{3}{4}$ であり、 ℓ_2 の傾きは $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ であるから、 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するのは

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow 3a &= -4\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

となるときである。上式の両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} 9a^2 &= 16(1-a^2) \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{16}{25} \\ \therefore a &= -\frac{4}{5} \quad (\because -1 < a < 0) \end{aligned}$$

を得る。このとき、 ℓ_2 の方程式は

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるから、②式に $y = 0$ を代入して、点 B の x 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{4}{5}x &= 1 \\ \therefore x &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $B\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ となる。

$$(\text{答}) a = -\frac{4}{5}, B\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

(iv)

点 C は ℓ_1 と ℓ_2 の交点より、 $a = -\frac{4}{5}$ のとき、①式と②式を連立したときの解が点 C の x, y 座標

を表す。よって、① $\times 4$ +② $\times 3$ より、 x を消去して

$$\begin{aligned} \frac{16}{5}y + \frac{9}{5}y &= 4 + 3 \\ \therefore y &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

を得る。また、① $\times 3$ -② $\times 4$ より、 y を消去して

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}x - \left(-\frac{16}{5}x\right) &= 3 - 4 \\ \therefore x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

を得る。よって、点 C の座標は $C\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ と求まる。これより、点 A, B の x 座標がそれぞれ

$\frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$ であり、点 C の y 座標は $\frac{7}{5}$ であるから、三角形 ABC の面積 T_1 は、底辺を AB とすると、

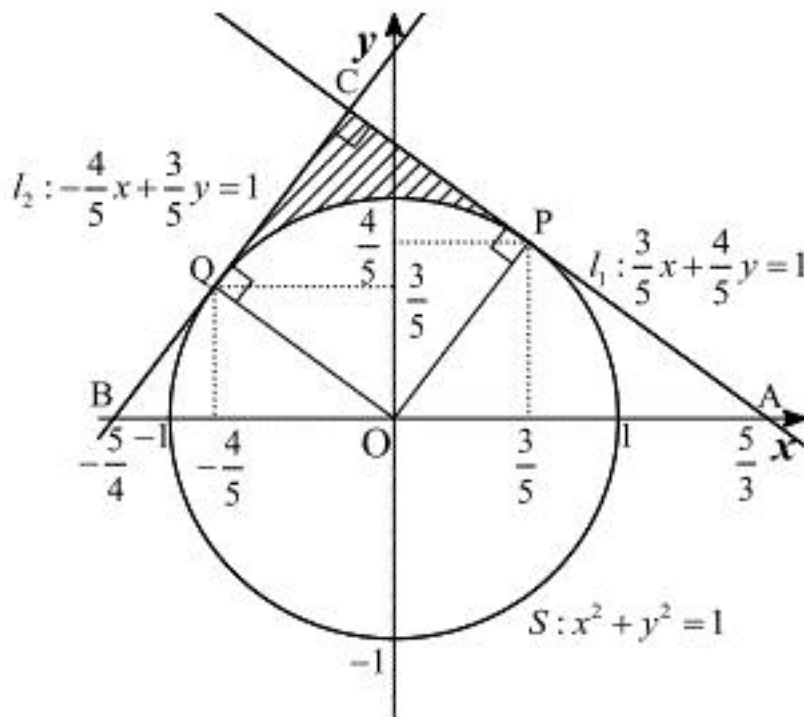
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{7}{5} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) C\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right), T_1 = \frac{49}{24}$$

(v)

$a = -\frac{4}{5}$ のとき、 ℓ_1 と ℓ_2 、および弧 PQ で囲まれた図形の面積 T_2 は下図の斜線部の面積である。



上図より、 T_2 は

$$T_2 = (\text{四角形 } OPCQ \text{ の面積}) - (\text{扇形 } OPQ \text{ の面積}) \quad \cdots \textcircled{3}$$

と表せる。ここで、

四角形 $OPCQ$ において、 P, Q は ℓ_1, ℓ_2 の接点であり、 ℓ_1 と ℓ_2 は直交するから、

$$\angle OPC = \angle OQC = \angle QCP = 90^\circ$$

が成り立つ。よって、

$$\angle POQ = 360^\circ - \angle OPC - \angle OQC - \angle QCP = 90^\circ$$

となるため、

$$OP = OQ = 1$$

であることと合わせると、四角形 $OPCQ$ は一辺の長さが 1 の正方形であることがわかる。

また、扇形 OPQ は半径は 1、中心角 90° であることもわかるから、③より

$$T_2 = 1^2 - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ⅲ

(i)

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}$ より, 三角形 AOB の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + a^4)(b^2 + b^4) - (-ab + a^2 b^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 (a^2 + 2ab + b^2)} \\ &= \frac{ab(a+b)}{2} \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

と a と b を用いて表せる。

$$\text{(答)} \quad S = \frac{ab(a+b)}{2}$$

(ii)

$\angle AOB$ が直角であるとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow -ab + a^2 b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow ab(ab-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow ab &= 1 \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

と a と b が満たすべき関係式が求められる。このとき S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab(a+b)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \left(\because b = \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

と a を用いて表せる。ここで, $a > 0$ かつ $\frac{1}{a} > 0$ より, 相加相乗平均の関係から,

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$$

が成り立つ。等号成立条件は $a = \frac{1}{a}$, つまり $a = 1$ のときである。よって S の最小値は 1, 最小値を与える組 (a, b) は $(a, b) = (1, 1)$ となる。

(答) S の最小値: 1, 最小値を与える組 (a, b) : (1, 1)

(iii)

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} b+m \\ (b+m)^2 \end{pmatrix}$ より, 三角形 OBC の面積 T は,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 + b^4) \{ (b+m)^2 + (b+m)^4 \} - \{ b(b+m) + b^2 (b+m)^2 \}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 (b+m)^2 \{ b^2 - 2b(b+m) + (b+m)^2 \}} \\ &= \frac{b(b+m)m}{2} \quad (\because b > 0, m > 0) \end{aligned}$$

と b と m を用いて表せる。

$$\text{(答)} \quad \frac{b(b+m)m}{2}$$

(iv)

$T = 3$ のとき, (iii) の結果より,

$$b(b+m)m = 6$$

が成り立つ。 b, m は正の整数であるから, $b+m$ は b, m よりも大きい正の整数であり, かけ合わせて 6 になる 3 つの正の整数の組は

$$(1, 1, 6), (1, 2, 3)$$

である。

[1] 3 つの正の整数の組が $(1, 1, 6)$ のとき

このとき, $b+m = 6$ であり, $b = 1, m = 1$ となるが, これは $b+m = 2 \neq 6$ より不適である。

[2] 3 つの正の整数の組が $(1, 2, 3)$ のとき

このとき, $b+m = 3$ であり, $(b, m) = (1, 2), (2, 1)$ となる。これらはいずれも $b+m = 3$ を満たす。

以上より, $T = 3$ となる正の整数の組 (b, m) は, $(b, m) = (1, 2), (2, 1)$ である。

(答) $(b, m) = (1, 2), (2, 1)$

(v)

$b \geq 1, m \geq 1$ より, $b+m \geq 2$ が成り立つ。よって $T = \frac{b(b+m)m}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{b(b+m)m}{2} &\geq \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{2} \\ \Leftrightarrow T &\geq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって T の最小値は 1 となり, これを満たす正の整数の組 (b, m) は, 等号成立条件から $(b, m) = (1, 1)$ のみである。

(答) T の最小値: 1, 最小値を与える組 (b, m) : (1, 1)