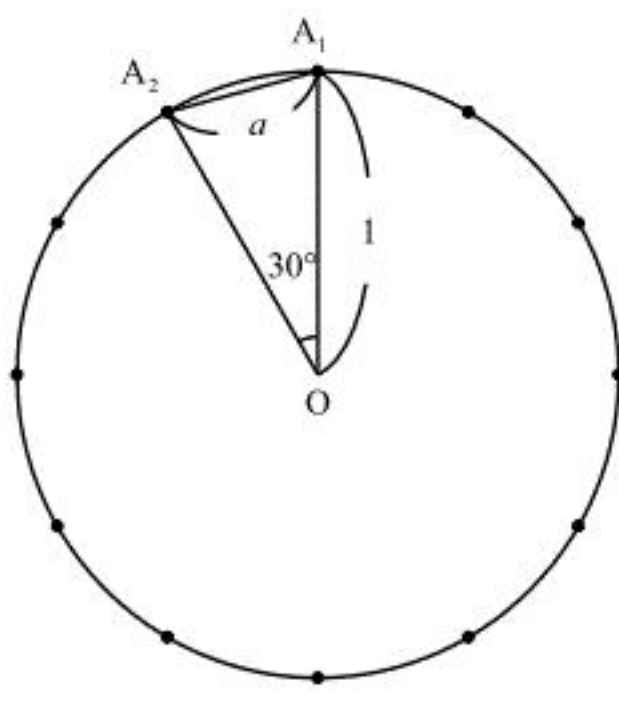


II.

(i)



円の中心をOとする。

$$\angle A_1OA_2 = 360^\circ \times \frac{1}{12} = 30^\circ$$

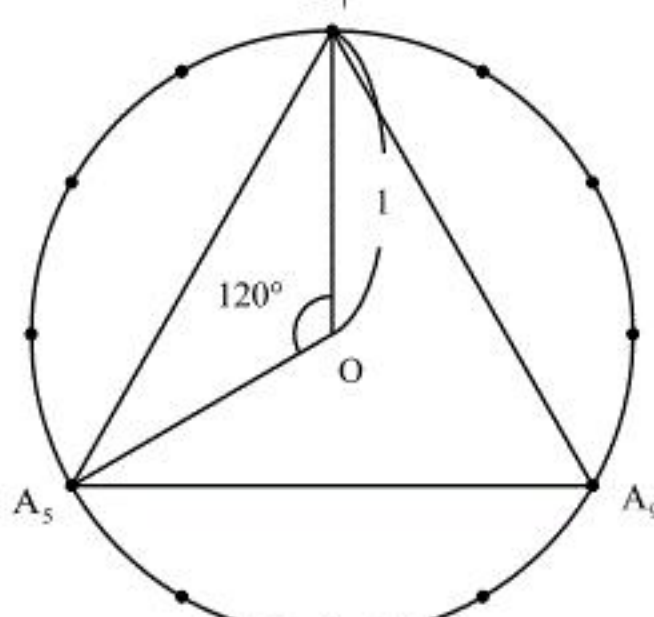
であるから、 $\triangle OA_1A_2$ に余弦定理を用いることにより、

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

と求まる。

(答) $a^2 = 2 - \sqrt{3}$

(ii)



$\angle A_1OA_5 = 120^\circ$ であり、 $\triangle OA_1A_5$ に余弦定理を用いることにより、

$$A_1A_5^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 3$$

$$\therefore A_1A_5 = \sqrt{3}$$

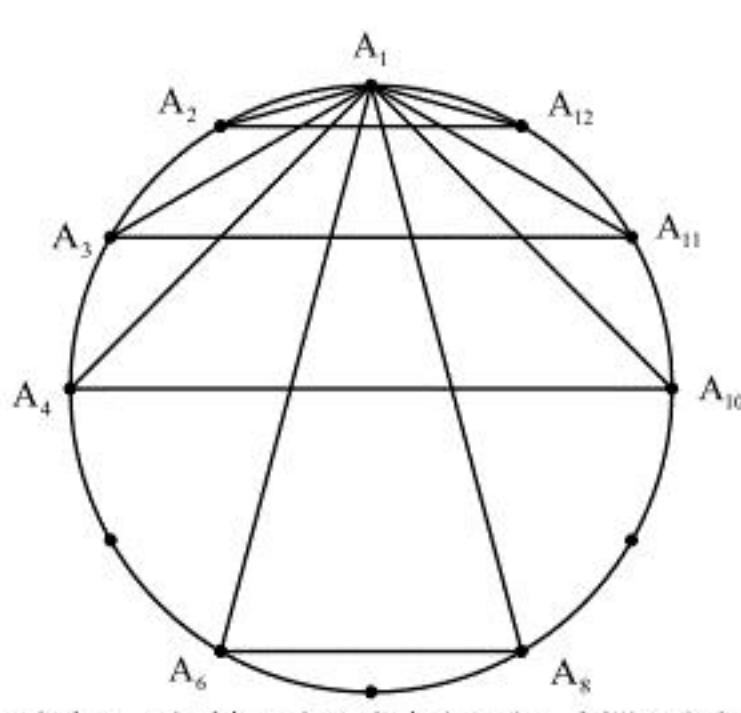
とわかる。したがって、 $\triangle A_1A_5A_9$ は1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であるから、面積は、

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(iii)



題意の二等辺三角形のうち A_1 が頂角のものを考えると、上図のように4種類存在することがわかる。 $A_2 \sim A_{12}$ が頂角のときも同様であるから、全部で

$$4 \cdot 12 = 48 \text{ 個}$$

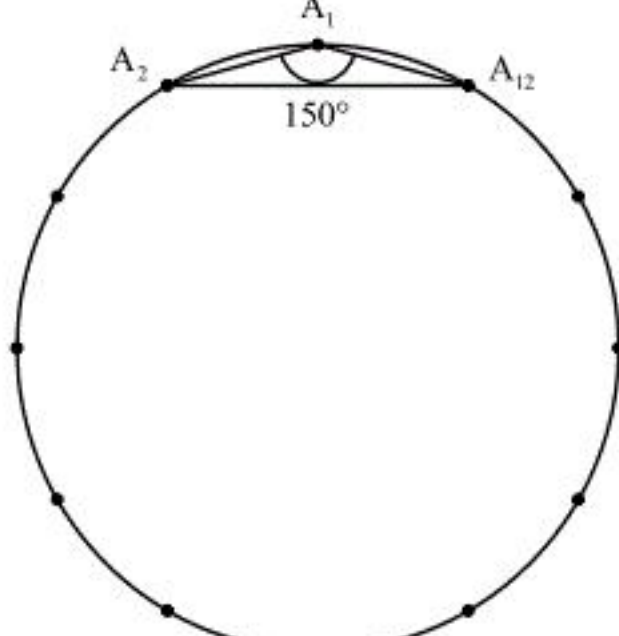
である。

(答) 48 個

(iv)

A_1 が頂角のものは以下の4種類である。

[1] $\triangle A_1A_2A_{12}$

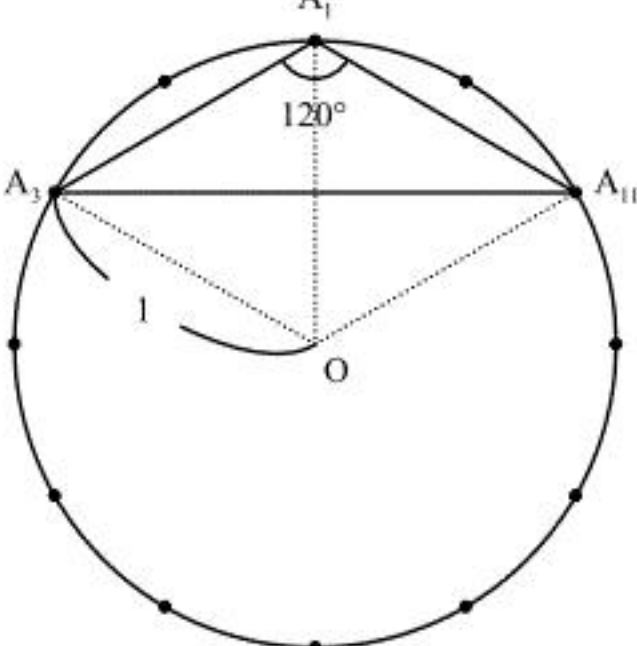


面積は、

$$\triangle A_1A_2A_{12} = \frac{1}{2} a^2 \sin 150^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

である。

[2] $\triangle A_1A_3A_{11}$

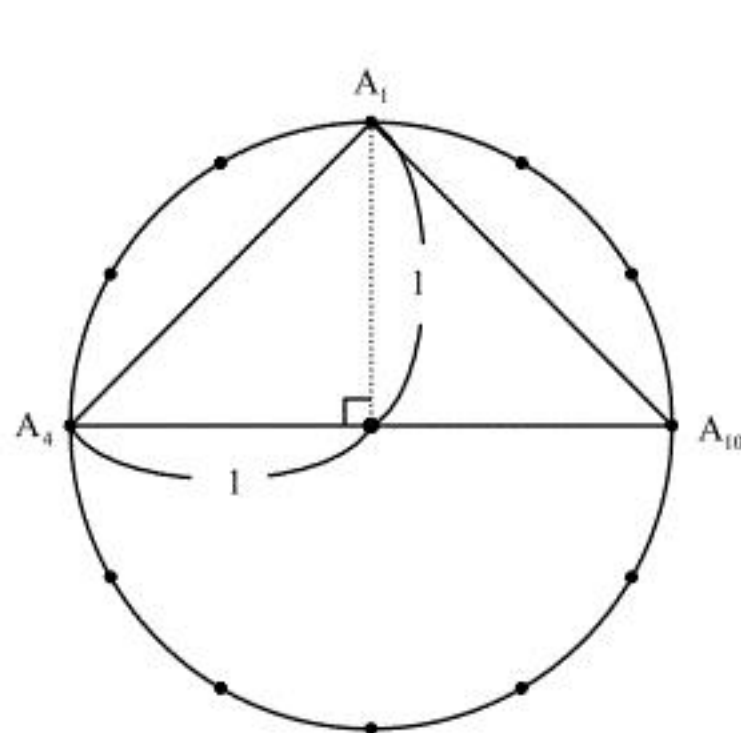


面積は、

$$\triangle A_1A_3A_{11} = \triangle OA_1A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

[3] $\triangle A_1A_4A_{10}$

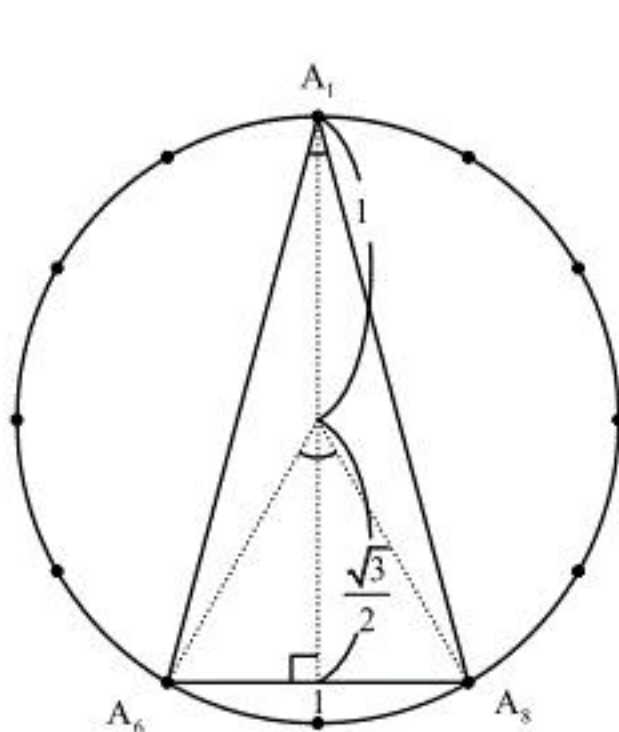


面積は、

$$\triangle A_1A_4A_{10} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

である。

[4] $\triangle A_1A_6A_8$



面積は、

$$\triangle A_1A_6A_8 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

である。

以上より、

$$\triangle A_1A_4A_{10} > \triangle A_1A_6A_8 > \triangle A_1A_3A_{11} > \triangle A_1A_2A_{12}$$

であるから、

$$S_1 = 1, S_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

である。

(答) $S_1 = 1, S_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

Ⅲ.

(i)

球面 S_1 は半径が 7, 中心が $B(3, 4, -5)$ であるから, 方程式は

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 7^2 = 49$$

となる。

$$(答) \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 49$$

(ii)

交点を P とし, 実数 t を用いて $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$ として考える。 P は球面 S_1 上の点であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BP}| &= 7 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}| &= 7 \\ \Leftrightarrow |t\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| &= 7 \\ \Leftrightarrow |t\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow t^2 |\overrightarrow{OA}|^2 - 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow t^2 (1^2 + 1^2 + 2^2) - 2t\{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)\} + \{3^2 + 4^2 + (-5)^2\} &= 49 \\ \Leftrightarrow 6t^2 + 6t + 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。ここで $|\overrightarrow{OP}| = |t| |\overrightarrow{OA}|$ より, 点 P の原点からの距離は t の絶対値に比例するため

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6} \\ t_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \quad \begin{cases} t_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6} \\ t_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

(iii)

Q は直線 OA 上の点であるため, 実数 s を用いて $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA}$ とおけて,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB} - s\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB}|^2 - 2s\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + s^2 |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 6s^2 + 6s + 50 \\ &= 6\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{97}{2} \end{aligned}$$

となるから, 2 点 Q, B の距離は $s = -\frac{1}{2}$ のとき最小値

$$\sqrt{\frac{97}{2}} = \frac{\sqrt{194}}{2}$$

を取る。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{194}}{2}$$

(iv)

S_2 の方程式は

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 6^2 = 36$$

であるから, xy 平面と交わる円の方程式は, $z=0$ を代入して

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-4)^2 + 5^2 &= 36, z=0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 &= 11, z=0 \end{aligned}$$

となる。したがって, 求める半径 r は

$$r = \sqrt{11}$$

である。

$$(答) \quad r = \sqrt{11}$$

(v)

求める球面の中心の座標を (a, b, c) , 半径を R とすると, 方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

となる。この球面と xy 平面が交わってできる円の方程式は, $z=0$ を代入して

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2 &= R^2, z=0 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 - c^2, z=0 \end{aligned}$$

となり, これが(iv)で求めた円と一致するから

$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ R^2 - c^2 = 11 \end{cases}$$

となる。よって球面の方程式は実数 c を用いて

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-c)^2 = c^2 + 11 \cdots \textcircled{1}$$

となる。この球面が xz 平面と接するとき, $y=0$ となる点が 1 つのみとなる。よって①式において $y=0$ を代入した方程式

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 4^2 + (z-c)^2 &= c^2 + 11, y=0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (z-c)^2 &= c^2 - 5, y=0 \end{aligned}$$

が解を 1 つのみもつから,

$$\begin{aligned} c^2 - 5 &= 0 \\ \therefore c &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって 2 つの球面の中心の座標は $(3, 4, \pm\sqrt{5})$ となるので, 求める距離は

$$\sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

となる。

$$(答) \quad 2\sqrt{5}$$