

I.

【解答】

	ア	イ
(i)	$\frac{24}{25}$	$\frac{24}{7}$
	ウ	
(ii)	$\frac{\sqrt{51}}{3}$	
	エ	オ
(iii)	-4	5
	カ	
(iv)	2	
	キ	
(v)	66	
	ク	
(vi)	2	
	ケ	
(vii)	$\frac{8}{3}$	
	コ	
(viii)	11	

【解説】

(i)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos\theta>0$ である。また、 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$$

である。よって、 $\sin 2\theta$, $\tan 2\theta$ の値は、2 倍角の公式より

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}$$

となる。

(ii)

A(1, 1, 1), B(-1, 3, 0) であるから、 $\overrightarrow{OC}$ を成分表示すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= (1, 1, 1) + (-1, 3, 0) \\ &= (0, 4, 1)\end{aligned}$$

である。また、点 D は BC の中点であるから、 $\overrightarrow{OD}$ を成分表示すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{(-1, 3, 0) + (0, 4, 1)}{2} \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、点 P は OD と AB の交点であるから、 $\overrightarrow{OP}$ は実数 s, t を用いると

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OD} = \left(-\frac{1}{2}s, \frac{7}{2}s, \frac{1}{2}s\right) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (2t-1, 3-2t, t) \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と 2 通りの表し方ができる。これより、①, ②の各成分の値を比較して

$$s=\frac{2}{3}, t=\frac{1}{3}$$

を得る。よって、 $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

と表されるため、線分 OP の長さは

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

と求まる。

(iii)

2 直線 $y=x-1$ と $y=-\frac{3}{2}x+2$ の交点は $\left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$ である。よって、点 $\left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}\right)$ と点 (1, 1) を通る直

線の方程式を求めればよいから

$$\begin{aligned}y-1 &= \frac{\frac{1}{5}-1}{\frac{6}{5}-1}(x-1) \\ \therefore y &= -4x+5\end{aligned}$$

となる。したがって、 $a=-4, b=5$ である。

(iv)

$y=x^3-x^2+x+1$ 上の点 (p, q) における接線の方程式は、 $y'=3x^2-2x+1$ より

$$y-q=(3p^2-2p+1)(x-p) \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と表される。また、 (p, q) は $y=x^3-x^2+x+1$ 上にあるから、 q の値は

$$q=p^3-p^2+p+1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで、③が原点を通るとき

$$-q=-3p^3+2p^2-p \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つから、④+⑤より、 p の値は

$$\begin{aligned}-2p^3+p^2+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p-1)(2p^2+p+1) &= 0 \\ \therefore p &= 1 \left(\because 2p^2+p+1=2\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0 \right)\end{aligned}$$

と求まる。これより、④に $p=1$ を代入すると q の値は

$$q=1^3-1^2+1+1=2$$

とわかる。

(v)

6 個の数字のうち、異なる 3 個を用いて 3 桁の数字をつくるとき、百の位の数が 1, 2, 3 である数字の個数は

$$3 \cdot {}_5P_2 = 60 \text{ (個)}$$

である。また、百の位の数が 4 であり、423 より小さい数字は

$$412, 413, 415, 416, 421$$

の 5 個である。よって、423 は小さい方から数えて

$$60+5+1=66 \text{ (番目)}$$

である。

(vi)

斜辺の長さが 13 であり、他の 1 辺の長さが 5 である直角三角形の残りの 1 辺の長さは

$$\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$$

である。よって、この直角三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$$

となる。ここで、直角三角形の内接円の半径を r とおくと、この面積は

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot (5+12+13)$$

とも表されるため、 r の値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot r \cdot (5+12+13) &= 30 \\ \therefore r &= 2\end{aligned}$$

と求まる。

(vii)

$x^2-2x=x(x-2)$ であるから、 $|x^2-2x|$ は $-1 \leq x \leq 2$ において

$$|x^2-2x| = \begin{cases} x^2-2x & (-1 \leq x < 0) \\ -x^2+2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となる。よって、 $\int_{-1}^2 |x^2-2x| dx$ の値は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 |x^2-2x| dx &= \int_{-1}^0 (x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= -\left(-\frac{1}{3}-1\right) + \left(-\frac{8}{3}+4\right) \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となる。

(viii)

与えられた不等式 $\left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{3}$ の両辺は正であるから、両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n &< \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \Leftrightarrow n(2\log_{10}3-1) &< -\log_{10}3 \\ \Leftrightarrow n(2 \cdot 0.4771-1) &< -0.4771 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{0.4771}{0.0458} \\ \therefore n &> 10.417 \cdots\end{aligned}$$

となる。よって

$$n_0=11$$

である。

Ⅱ.

(i)

C_1 と S が外接するとき、それぞれの円の中心である点 D と点 F の間の距離は、2 つの円の半径の和に等しい。ここで、点 D の座標は $(2\sqrt{p}, p)$ 、点 F の座標は $(0, r)$ であるから

$$\sqrt{(2\sqrt{p}-0)^2+(p-r)^2}=p+r$$

となる。ここで、 p, r は正の実数であるから、方程式の両辺は正である。よって、両辺を 2 乗して解くと

$$\begin{aligned}(2\sqrt{p})^2+(p-r)^2 &= (p+r)^2 \\ \Leftrightarrow 4p+p^2-2pr+r^2 &= p^2+2pr+r^2 \\ \Leftrightarrow 4p-4pr &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p(r-1) &= 0 \\ \therefore r &= 1 (\because p > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $r=1$

(ii)

C_1 と C_2 が外接するとき、それぞれの円の中心である点 D と点 E の間の距離は、2 つの円の半径の和に等しい。ここで、点 D の座標は $(2\sqrt{p}, p)$ 、(i)の結果より点 E の座標は $(2, 1)$ であるから

$$\sqrt{(2\sqrt{p}-2)^2+(p-1)^2}=p+1$$

となる。方程式の両辺は正であるから、両辺を 2 乗して解くと

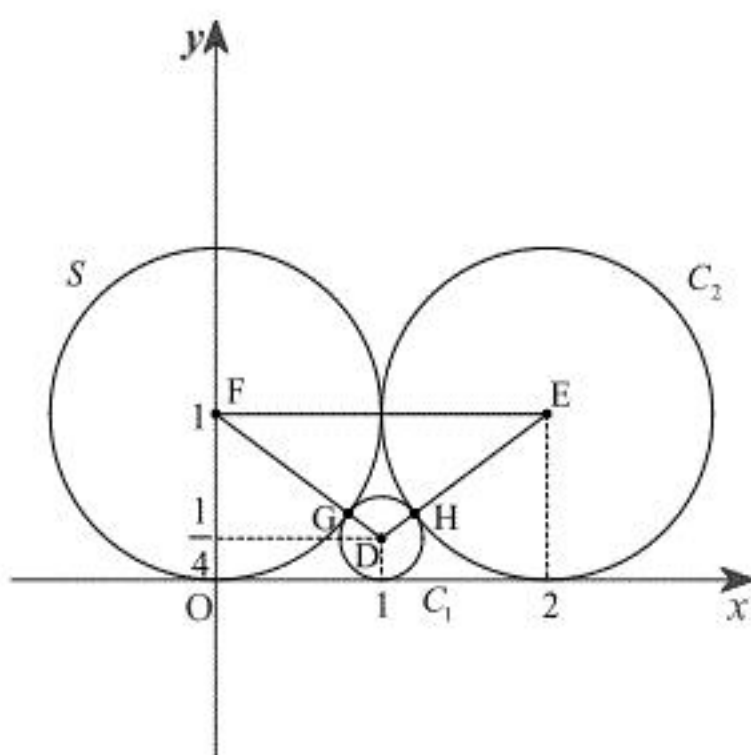
$$\begin{aligned}(2\sqrt{p}-2)^2+(p-1)^2 &= (p+1)^2 \\ \Leftrightarrow 4p-8\sqrt{p}+4+p^2-2p+1 &= p^2+2p+1 \\ \Leftrightarrow -8\sqrt{p}+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{p} &= \frac{1}{2} \\ \therefore p &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

(答) $p=\frac{1}{4}$

(iii)

(i)の結果より、点 E と点 F の座標はそれぞれ $(2, 1)$ 、 $(0, 1)$ である。また、 C_2 と S の半径はともに 1 である。よって、点 E と点 F の間の距離は、 C_2 と S の半径の和に等しいから、 C_2 と S は外接する。さらに、(i)の結果より、点 D の座標は $(1, \frac{1}{4})$ である。したがって、3 つの円 C_1, C_2, S を座標平面上に図示すると下図のようになる。



接点 G は線分 DF 上にあり、円の半径の比より $DG:GF=1:4$ である。よって、接点 G の座標は

$$\left(1 \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}\right)$$

すなわち、 $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ となる。

(答) $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

(iv)

(iii)と同様に、接点 H は線分 DE 上にあり、円の半径の比より $DH:HF=1:4$ である。よって、接点 H の座標は

$$\left(1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}\right)$$

すなわち、 $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ となる。

(答) $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$

(v)

点 E, F, G, H の座標はそれぞれ $(2, 1)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ 、 $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ であるから、四角形 $EFGH$ は

$EF \parallel HG$ の台形である。したがって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$$

となる。

(答) $\frac{18}{25}$

Ⅲ.

(i)

$Q(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りは1次式となるから、実数 a, b を用いて $ax+b$ とおける。

また、このときの商を $R(x)$ とおくと、 $Q(x)$ は

$$Q(x) = (x-1)(x-2)R(x) + ax + b$$

と表される。 x に $1, 2$ をそれぞれ代入すると

$$Q(1) = a + b, Q(2) = 2a + b$$

となる。ここで、 $Q(x)$ を $x-1, x-2$ で割った余りがそれぞれ $-1, 8$ であることから、剰余の定理より

$$Q(1) = -1, Q(2) = 8$$

となる。よって

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \\ \therefore a = 9, b = -10$$

となるから、求める余りは

$$9x - 10$$

である。

(答) $9x - 10$

(ii)

$Q(x)$ は x^3 の係数が1である3次式であるから、 $R(x)$ は実数 d を用いて

$$R(x) = x + d$$

と表される。ここで、(i)より

$$\begin{aligned} Q(-1) &= -1 \\ \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) \cdot (-1 + d) - 9 - 10 &= -1 \\ \Leftrightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(x-2)(x+4) + 9x - 10 \\ &= x^3 + x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 2$

(iii)

$$P(x^2) = P(x)Q(x) + 2x \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、 $x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(0) &= P(0)Q(0) + 0 \\ \Leftrightarrow P(0) &= -2P(0) \\ \therefore P(0) &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様に、 $\textcircled{1}$ に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(1) &= P(1)Q(1) + 2 \\ \Leftrightarrow P(1) &= -P(1) + 2 \\ \therefore P(1) &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ に $x=-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(1) &= P(-1)Q(-1) - 2 \\ \Leftrightarrow 1 &= -P(-1) - 2 \\ \therefore P(-1) &= -3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $P(0) = 0, P(1) = 1, P(-1) = -3$

(iv)

$P(x), x(x-1)(x+1)$ はともに3次式であるから、実数 e, f, g, h を用いて

$$P(x) = hx(x-1)(x+1) + ex^2 + fx + g$$

とおける。 x に $0, 1, -1$ をそれぞれ代入すると

$$P(0) = g, P(1) = e + f + g, P(-1) = e - f + g$$

となる。ここで、(iii)の結果を用いると

$$\begin{cases} g = 0 \\ e + f + g = 1 \\ e - f + g = -3 \end{cases} \\ \therefore e = -1, f = 2, g = 0$$

となる。よって、求める余りは

$$-x^2 + 2x$$

となる。

(答) $-x^2 + 2x$

(v)

(iv)より

$$P(x) = hx(x-1)(x+1) - x^2 + 2x$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ に $x=2$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(4) &= P(2)Q(2) + 4 \\ \Leftrightarrow 60h - 8 &= 6h \cdot 8 + 4 \\ \Leftrightarrow h &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x-1)(x+1) - x^2 + 2x \\ &= x^3 - x^2 + x \end{aligned}$$

となる。

(答) $P(x) = x^3 - x^2 + x$