

I.

【解答】

(i)	ア	
	23	
(ii)	イ	ウ
	3	−2
(iii)	エ	
	−6	
(iv)	オ	
	6	
(v)	カ	
	3	
(vi)	キ	ク
	1	3
(vii)	ケ	
	$\sqrt{2}$	
(viii)	コ	サ
	35	18

【解説】

- (i)
- ユークリッドの互除法を用いると、
- $$\begin{aligned}19343 &= 4 \cdot 4807 + 115 \\ 4807 &= 41 \cdot 115 + 92 \\ 115 &= 1 \cdot 92 + 23 \\ 92 &= 4 \cdot 23\end{aligned}$$
- となるから、求める最大公約数は23である。

- (ii)
- $$2 < \sqrt{8} < 3, 1 < \sqrt{2} < 2$$
- より、 a の整数部分は2、 b の整数部分は1であるから、
- $$\begin{aligned}b &= \sqrt{2} - 1 \\ a &= \sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 1 = 2b\end{aligned}$$
- となる。よって
- $$a^2 - 3b^2 = b^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$
- であり、 p, q が有理数であることから、
- $$p = 3, q = -2$$
- とわかる。

- (iii)
- $$\begin{aligned}yi - y &= -x^3 + x + xi - 4i \\ \Leftrightarrow x^3 - x - y + (-x + y + 4)i &= 0\end{aligned}$$
- であり、 x, y が実数のとき $x^3 - x - y, -x + y + 4$ も実数であることから、
- $$\begin{aligned}\begin{cases} x^3 - x - y = 0 \\ -x + y + 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x + 4 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)\{(x - 1)^2 + 1\} = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \\ \therefore x = -2, y = -6\end{aligned}$$
- とわかる。

- (iv)
- 二項定理より、
- $$\begin{aligned}11^{10} &= (10 + 1)^{10} \\ &= {}_{10}C_{10} \cdot 10^{10} + \cdots + {}_{10}C_3 \cdot 10^3 + {}_{10}C_2 \cdot 10^2 + {}_{10}C_1 \cdot 10 + {}_{10}C_0 \\ &= ({}_{10}C_{10} \cdot 10^7 + \cdots + {}_{10}C_3) \cdot 10^3 + 45 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10 + 1 \\ &= ({}_{10}C_{10} \cdot 10^7 + \cdots + {}_{10}C_3 + 4) \cdot 1000 + 601\end{aligned}$$

となるから、 11^{10} の百の位の数 は6である。

- (v)
- $$X = 2^x$$
- とおくと、 $X > 0$ であり、また
- $$x = \log_2 X$$
- が成り立つ。よって
- $$\begin{aligned}4^x - 2^x - 56 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - X - 56 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X - 8)(X + 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow X = 8 \ (\because X > 0) \\ \therefore x = \log_2 8 &= 3\end{aligned}$$
- である。

- (vi)
- 球面が xy 平面に接することから、この球の半径は球の中心の z 座標の絶対値に等しく、 $|a|$ である。よってこの球の方程式は
- $$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 = a^2$$
- である。これが点 $(1, 2, 1)$ を通るとき、
- $$\begin{aligned}(1 - a)^2 + (2 - a)^2 + (1 - a)^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 8a + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(a - 1)(a - 3) &= 0 \\ \therefore a &= 1, 3\end{aligned}$$
- である。

- (vii)
- $$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \tan x > 0 \text{ であるから、相加相乗平均の関係より}$$
- $$\begin{aligned}\frac{2 \sin x}{3 \cos x} + \frac{3 \cos x}{4 \sin x} &= \frac{2 \tan x}{3} + \frac{3}{4 \tan x} \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{2 \tan x}{3} \cdot \frac{3}{4 \tan x}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$
- であり、等号は
- $$\begin{aligned}\frac{2 \tan x}{3} &= \frac{3}{4 \tan x} \\ \Leftrightarrow \tan x &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \ (\because \tan x > 0)\end{aligned}$$
- のとき成り立つ。よって求める最小値は $\sqrt{2}$ である。

- (viii)
- AからBへ最短距離で行くには、北に3回、東に4回移動すればよいので、その道順は
- $${}_{3+4}C_3 = 35 \text{ (通り)}$$
- ある。また、AからCへ最短距離で行くには、北に2回、東に2回移動すればよく、CからBへ最短距離で行くには、北に1回、東に2回移動すればよい。よってAから出発してCを通じてBへ行く最短距離の道順は
- $${}_{2+2}C_2 \cdot {}_{1+2}C_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ (通り)}$$
- ある。

Ⅱ.

(i)

$C_1: y = x^2 + 1$ の点 $A(a, a^2 + 1)$ における接線 l_1 の方程式は、 $y = x^2 + 1$ の導関数が $y' = 2x$ であ

ることより、

$$\begin{aligned} y - (a^2 + 1) &= 2a(x - a) \\ \therefore y &= 2ax - a^2 + 1 \qquad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、 $C_2: y = \frac{1}{t^2}x^2 + t^2$ の点 $B\left(b, \frac{b^2}{t^2} + t^2\right)$ における接線 l_2 の方程式は、 $y = \frac{1}{t^2}x^2 + t^2$ の

導関数が $y' = \frac{2}{t^2}x$ であることより、

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{b^2}{t^2} + t^2\right) &= \frac{2b}{t^2}(x - b) \\ \therefore y &= \frac{2b}{t^2}x - \frac{b^2}{t^2} + t^2 \qquad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $l_1: y = 2ax - a^2 + 1, l_2: y = \frac{2b}{t^2}x - \frac{b^2}{t^2} + t^2$

(ii)

直線 l_1 と直線 l_2 が一致するとき、①、②より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2a = \frac{2b}{t^2} \\ -a^2 + 1 = -\frac{b^2}{t^2} + t^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b = at^2 \\ a^2 - \frac{b^2}{t^2} + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $b = at^2$ を $a^2 - \frac{b^2}{t^2} + t^2 - 1 = 0$ に代入して、

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{a^2 t^4}{t^2} + t^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - t^2)a^2 &= 1 - t^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 1 \quad (\because t > 1) \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

を得る。よって、 $b = at^2 = t^2$ である。これより、点 A、B の座標は

$A(1, 2), B(t^2, 2t^2)$

となる。また、一致した直線 l の方程式は、①に $a = 1$ を代入して、

$y = 2x$

となる。

(答) $A(1, 2), B(t^2, 2t^2), l: y = 2x$

(iii)

放物線 $C_1: y = x^2 + 1$ と $C_2: y = \frac{1}{t^2}x^2 + t^2$ の交点のうち、 x 座標が正である点 M の x 座標は、そ

れぞれの方程式から y を消去して、

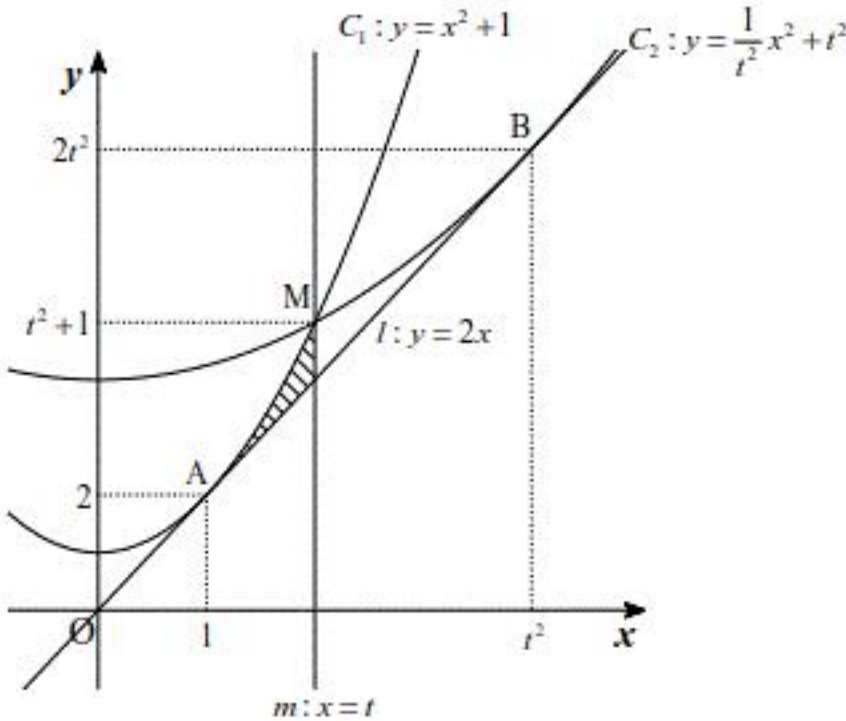
$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= \frac{1}{t^2}x^2 + t^2 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 1)x^2 &= t^2(t^2 - 1) \\ \Leftrightarrow x^2 &= t^2 \quad (\because t > 1) \\ \therefore x &= t \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、点 M の座標は $M(t, t^2 + 1)$ と表される。

(答) $M(t, t^2 + 1)$

(iv)

点 M を通り y 軸に平行な直線 $m: x = t$ と放物線 $C_1: y = x^2 + 1$ および直線 $l: y = 2x$ で囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



上図より、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{t^2} \{(x^2 + 1) - 2x\} dx \\ &= \int_1^{t^2} (x - 1)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3}(t - 1)^3 \end{aligned}$$

と表される。

(答) $S = \frac{1}{3}(t - 1)^3$

(v)

$S = \frac{8}{3}$ のとき、 t の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(t - 1)^3 &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow (t - 1)^3 &= 8 \\ \Leftrightarrow t - 1 &= 2 \\ \therefore t &= 3 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $t = 3$

Ⅲ.

(i)

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

であるから,

$$S_1 = 1, S_2 = 4$$

となる。また, 与式より

$$S_{n+2} - 6S_{n+1} + 8S_n = -2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり, $n=1$ の場合を考えると

$$S_3 = 6S_2 - 8S_1 - 2 = 6 \cdot 4 - 8 \cdot 1 - 2 = 14$$

となる。よって,

$$a_3 = S_3 - S_2 = 10$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_3 = 14, a_3 = 10$$

(ii)

①より, $n \geq 1$ において,

$$S_{n+3} - 6S_{n+2} + 8S_{n+1} = -2$$

である。これと①より,

$$(S_{n+3} - 6S_{n+2} + 8S_{n+1}) - (S_{n+2} - 6S_{n+1} + 8S_n) = -2 - (-2)$$

$$\Leftrightarrow S_{n+3} - S_{n+2} = 6(S_{n+2} - S_{n+1}) - 8(S_{n+1} - S_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+3} = 6a_{n+2} - 8a_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

となる。ここで, (i)よりこれは $n=0$ としても成り立つから,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n \quad (n \geq 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$$

(iii)

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \Leftrightarrow a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

であるから, $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ かつ $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ を満たす α, β は, (ii)

の結果より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha\beta = 8 \end{cases}$$

を満たすものであり, これらは 2 次方程式 $t^2 - 6t + 8 = 0$ の解であるから, $\alpha < \beta$ も考慮すると

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, 4$$

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 2, \beta = 4$$

(iv)

(iii)より,

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 2a_{n+1} &= 4(a_{n+1} - 2a_n) \\ &= 4^2(a_n - 2a_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= 4^n(a_2 - 2a_1) \\ &= 4^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} &= 2(a_{n+1} - 4a_n) \\ &= 2^2(a_n - 4a_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= 2^n(a_2 - 4a_1) \\ &= -2^n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} = 4^n, \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} = -2^n$$

(v)

(iv)より,

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - (a_{n+2} - 4a_{n+1}) = 4^n - (-2^n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{4^n + 2^n}{2} \quad (n \geq 1)$$

となる。これは $n=0$ でも成り立つから,

$$a_n = \frac{4^{n-1} + 2^{n-1}}{2} \quad (n \geq 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{4^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$$