

I.

〔解答〕

(i)	ア			
	13			
(ii)	イ			
	$\frac{7}{25}$			
(iii)	ウ	エ	オ	
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	
(iv)	カ	キ		
	-3	4		
(v)	ク	ケ		
	2	$\frac{\pi}{6}$		

〔解説〕

(i)

A の 10 進法表記における 10 の位, 1 の位をそれぞれ a, b ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$) とする。 A を 4 進法表記にしたときの 4 の位が b , 1 の位が a となることから, a, b はともに 1, 2, 3 のうちのいずれかであり, また

$$\begin{aligned}10a + b &= 4b + a \\ \Leftrightarrow 3a &= b\end{aligned}$$

を満たす。以上より, $a = 1, b = 3$ であり, A を 10 進法で表すと 13 となる。

(ii)

与えられた条件より,

$$\begin{aligned}(\cos \theta + \sin \theta)^2 &= \frac{1}{25} \\ \Leftrightarrow 1 + \sin 2\theta &= \frac{1}{25} \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta &= -\frac{24}{25}\end{aligned}$$

であり,

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\theta < 0$$

より $\cos 2\theta > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AP}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AC}}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\overrightarrow{\text{AB}} + (\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}})\right\} \\ &= \overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}} \\ \overrightarrow{\text{AQ}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AG}} + \overrightarrow{\text{AH}}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}) + (\overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AR}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AP}} + \overrightarrow{\text{AQ}}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}\right)\right\} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}\end{aligned}$$

である。

(iv)

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x + a + 2) + (2a + b + 3)x - (a + 4)$$

より,

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2a + b + 3 = 1 \\ a + 4 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

である。

(v)

$|z| = 1$ より, $\theta = \arg z$ として

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つ。ド・モアブルの定理より,

$$z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3} &= z^{-3} \\ &= \cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta) \\ &= \cos 3\theta - i \sin 3\theta\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right| &= |\cos 3\theta + i \sin 3\theta - (\cos 3\theta - i \sin 3\theta)| \\ &= 2|i| \cdot |\sin 3\theta| \\ &= 2|\sin 3\theta|\end{aligned}$$

である。よって $\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right|$ は $|\sin 3\theta| = 1$ のとき最大値 2 をとる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 3\theta < \frac{3}{2}\pi$ の範囲で $|\sin 3\theta| = 1$ となるのは,

$$\begin{aligned}3\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

のときであるから, 求める偏角は $\arg z = \frac{\pi}{6}$ である。

II.

(i)

点 P が $t+1$ 秒後に頂点 B に存在するには、 t 秒後に頂点 A, C, D に存在して、そこから頂点 B に移動すればよいから、

$$B(t+1) = pA(t) + pC(t) + (1-2p)D(t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。同様に、点 P が $t+1$ 秒後に頂点 D に存在するには、 t 秒後に頂点 A, B, C に存在して、そこから頂点 D に移動すればよいから、

$$D(t+1) = pA(t) + (1-2p)B(t) + pC(t)$$

となる。

$$(答) \begin{cases} B(t+1) = pA(t) + pC(t) + (1-2p)D(t) \\ D(t+1) = pA(t) + (1-2p)B(t) + pC(t) \end{cases}$$

(ii)

(i)より、

$$\begin{aligned} B(t+1) - D(t+1) &= \{pA(t) + pC(t) + (1-2p)D(t)\} - \{pA(t) + (1-2p)B(t) + pC(t)\} \\ &= (2p-1)\{B(t) - D(t)\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad B(t+1) - D(t+1) = (2p-1)\{B(t) - D(t)\}$$

(iii)

点 P は t 秒後に頂点 A, B, C, D のいずれかに存在しているから、

$$A(t) + B(t) + C(t) + D(t) = 1$$

である。また、(ii)より

$$B(t) - D(t) = (2p-1)^t \{B(0) - D(0)\}$$

となる。ここで、

$$B(0) = D(0) = 0$$

であるから、

$$B(t) - D(t) = 0$$

となる。

$$(答) \quad A(t) + B(t) + C(t) + D(t) = 1, \quad B(t) - D(t) = 0$$

(iv)

(iii)より、

$$D(t) = B(t)$$

$$A(t) + C(t) = 1 - \{B(t) + D(t)\} = 1 - 2B(t)$$

となるから、①に代入して、

$$\begin{aligned} B(t+1) &= p\{1 - 2B(t)\} + (1-2p)B(t) \\ &= (1-4p)B(t) + p \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad B(t+1) = (1-4p)B(t) + p$$

(v)

(iv)より、 $p = \frac{1}{3}$ を代入して、

$$B(t+1) = -\frac{1}{3}B(t) + \frac{1}{3}$$

$$\therefore B(t+1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left\{ B(t) - \frac{1}{4} \right\}$$

となる。数列 $\left\{ B(t) - \frac{1}{4} \right\}$ は初項 $B(0) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるので

$$B(t) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^t$$

$$\therefore B(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^t \right\}$$

となる。

$$(答) \quad B(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^t \right\}$$

Ⅲ.

(i)

$e^x > 0, e^{-x} > 0$ より, 相加相乗平均の関係から

$$\begin{aligned} t &= e^x + e^{-x} \\ &\geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。等号が成立するのは,

$$\begin{aligned} e^x &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

のときである。よって t の最小値は 2 とわかる。

(答) 2

(ii)

$f'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4e^{2x}(1+e^{2x}) - 4e^{4x}}{(1+e^{2x})^2} - \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} \\ &= \frac{4}{t^2} - \frac{1}{t+2} \end{aligned}$$

である。

(答) $f'(x) = \frac{4}{t^2} - \frac{1}{t+2}$

(iii)

$$\frac{dt}{dx} = e^x - e^{-x} > 0 \quad (\because x > 0)$$

より x と t は 1 対 1 に対応し, x が増加すると t も増加する。 $x > 0$ より, $t > 2$ である。(ii)より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{t^2} &= \frac{1}{t+2} \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t - 8 &= 0 \\ \therefore t &= 2 + 2\sqrt{3} \quad (\because t > 2) \end{aligned}$$

となる。よって, $t = 2 + 2\sqrt{3}$ のときの x を α とすると $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

t	2	...	$2 + 2\sqrt{3}$	...
x	0	...	α	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			極大	

よって, $t = 2 + 2\sqrt{3}$ のとき $f(x)$ は最大値をとる。

(答) $t = 2 + 2\sqrt{3}$

(iv)

$a > 0$ より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a \left\{ \frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}} - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \right\} dx \\ &= \left[\log|1+e^{2x}| - \log|1+e^x| \right]_0^a \\ &= \log \frac{1+e^{2a}}{1+e^a} \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a) = \log \frac{1+e^{2a}}{1+e^a}$

(v)

$a > 0$ より

$$\begin{aligned} S(a) &= \log \frac{e^{2a}(e^{-2a} + 1)}{e^a(e^{-a} + 1)} \\ &= \log e^a + \log \frac{e^{-2a} + 1}{e^{-a} + 1} \\ &= a + \log \frac{e^{-2a} + 1}{e^{-a} + 1} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{a} \log \frac{e^{-2a} + 1}{e^{-a} + 1} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} = 1$