

2017年度

N 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～シに当てはまる数または式を記入せよ.

(i) 正の整数 x で 109 を割ると 13 余り, 81 を割ると 9 余る. このとき, x の値は

アである.

(ii) $\frac{4}{x^4-1} = \frac{-2}{x^2+1} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ が x についての恒等式となるとき, 定数

a, b の値は $a =$ イ, $b =$ ウである.

(iii) $0 \leq \theta < \pi$ とする. $2 \sin \theta = \cos \frac{\theta}{2}$ のとき, $\sin \frac{\theta}{2} =$ エである.

(iv) $x > 0$ の範囲で, $(\log_5 x)^2 - \log_5 x + 3$ の最小値は オであり, そのとき

$x =$ カである.

(v) p と q を実数とする. $i^3 + i^2 + i + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} = p + qi$ であるとき, $p =$ キ,

$q =$ クである. ただし, i は虚数単位とする.

(vi) 関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = 4x + x \int_0^3 tf(t) dt$ を満たすとき, $f(x) =$ ケで

ある.

(vii) 座標空間内の 3 点 $A(2, 4, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(a, b, c)$ が一直線上にあ

り, かつ点 C が zx 平面上にあるとき, $a =$ コ, $c =$ サである.

(viii) x 軸上の点 P は, 時刻 0 に $x = 0$ から出発し, 1 秒ごとに $+1$ または -1 だけ

それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する. このとき, 点 P が 5 秒後に $x = 1$ にある確率は

シである.

Ⅱ. 座標平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円を S とする. 点 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ における S の接線を l_1 とする. また, $-1 < a < 0$ とし, 点 $Q(a, \sqrt{1-a^2})$ における S の接線を l_2 とする. さらに, 直線 l_1 と x 軸の交点を A , 直線 l_2 と x 軸の交点を B , 直線 l_1 と直線 l_2 の交点を C とする. このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) l_1 の方程式と A の座標を求めよ.

(ii) l_2 の方程式を a を用いて表せ.

(iii) l_1 と l_2 が直交するとき, a の値と B の座標を求めよ.

(iv) a を (iii) で求めた値とすると, C の座標と三角形 ABC の面積 T_1 を求めよ.

(v) a を (iii) で求めた値とすると, l_1 と l_2 , および弧 PQ で囲まれた図形の面積 T_2 を求めよ. ただし, 弧 PQ は四角形 $OPCQ$ の内部にあるとする.

Ⅲ. a, b, m を正の実数とする. 座標平面上の3点 $A(-a, a^2)$, $B(b, b^2)$,

$C(b+m, (b+m)^2)$ と原点 O について, 三角形 AOB の面積を S , 三角形 OBC の面積を T とする. このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) S を a と b を用いて表せ.

(ii) $\angle AOB$ が直角であるときの S の最小値と, S の最小値を与える組 (a, b) を求めよ.

(iii) T を b と m を用いて表せ.

(iv) $T = 3$ となる正の整数の組 (b, m) をすべて求めよ.

(v) (b, m) が正の整数の組であるときの T の最小値と, T の最小値を与える組 (b, m) をすべて求めよ.

【以下余白】