

I.

【解答】

(i)	ア	イ
	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
(ii)	ウ	エ
	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$
(iii)	オ	
	9	
(iv)	カ	
	$2-\sqrt{19}$	
(v)	キ	
	18	
(vi)	ク	
	$\frac{3}{2}$	
(vii)	ケ	
	2880	
(viii)	コ	
	2	

【解説】

(i)

解と係数の関係より、

$$p+q=a$$

$$pq=1$$

が成り立つ。 $p+q=a$ と、 $p-q=1$ を連立させると

$$p=\frac{a+1}{2}$$

$$q=\frac{a-1}{2}$$

が得られ、 $pq=1$ に代入すると

$$\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow a^2=5$$

$$\therefore a=\sqrt{5}\left(\because a>0\right)$$

となる。また、これより

$$p=\frac{a+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

も得られる。

(ii)

2倍角の公式を用いて変形すると

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$=2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$=2\cdot\tan\theta\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{24}{25}$$

が得られる。また、

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}-1$$

$$=2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}-1$$

$$=\frac{7}{25}$$

である。

(iii)

2点 $(2,4)$ 、 $(-3,3)$ をそれぞれA、Bとすると、

$$\triangle\text{AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overline{\text{OA}}\right|^2\left|\overline{\text{OB}}\right|^2-\left(\overline{\text{OA}}\cdot\overline{\text{OB}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20\cdot 18-6^2}=\frac{18}{2}=9$$

となる。

(iv)

分母の有理化をすると

$$\frac{1}{5-\sqrt{19}}=\frac{5+\sqrt{19}}{6}$$

であり、

$$\sqrt{16}<\sqrt{19}<\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow 4<\sqrt{19}<5$$

$$\Leftrightarrow 9<5+\sqrt{19}<10$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}<\frac{5+\sqrt{19}}{6}<\frac{5}{3}$$

であるから、

$$\alpha=1$$

$$\beta=\frac{5+\sqrt{19}}{6}-1=\frac{\sqrt{19}-1}{6}$$

である。よって、

$$\alpha-6\beta=1-6\cdot\frac{\sqrt{19}-1}{6}=2-\sqrt{19}$$

となる。

(v)

$2028=2^2\cdot 3\cdot 13^2$ と素因数分解できるから、その約数の個数は

$$(1+2)\cdot(1+1)\cdot(1+2)=18(\text{個})$$

である。

(vi)

まず、真数条件より

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1>0\text{かつ}2x+1>0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x>1$$

である。また、与式を解くと

$$\log_2(x-1)+\log_2(2x+1)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\{(x-1)(2x+1)\}=\log_2 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2},-1$$

となる。これと真数条件より、解は

$$x=\frac{3}{2}$$

である。

(vii)

先に大人と子どもをそれぞれ別々に並べてから、子ども3人を大人の列の両端以外に挿入

することを考える。まず、大人の並び方は

$$5!=120(\text{通り})$$

である。また、子どもの並び方は

$$3!=6(\text{通り})$$

である。また、大人が5人並んでいるとき、子ども3人の列を挿入できる箇所は4通りある。

以上より、求める場合の数は

$$120\cdot 6\cdot 4=2880(\text{通り})$$

である。

(viii)

与式は x についての恒等式であるから、 $x=a$ としても成り立つ。 $x=a$ のとき、左辺は0であ

るから

$$3a^2-12a+12=0\Leftrightarrow(a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

となる。

II.

(i)

与えられた漸化式より

$$a_3 = 4a_2 - 3a_1 = 14$$

$$a_4 = 4a_3 - 3a_2 = 41$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_3 = 14, a_4 = 41$$

(ii)

$$a_{n+2} - a_{n+1} = c(a_{n+1} - a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} - (c+1)a_{n+1} + ca_n = 0$$

であることから、与えられた漸化式と各項を比較することで $c=3$ を得る。

$$(\text{答}) \quad c=3$$

(iii)

(ii)の結果より、

$$b_{n+1} = 3b_n$$

が成り立つ。また、

$$b_1 = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

である。よって、数列 $\{b_n\}$ は初項3、公比3の等比数列である。よって

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = 3^n$$

(iv)

(iii)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1)$$

(v)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1) \\ &= \frac{3^n + 1}{2} \end{aligned}$$

である。この結果は、 $n=1$ のときも成り立っている。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

Ⅲ.

(i)

放物線 C_1, C_2 の式から y を消去して整理すると

$$x^2 - 1 = -(x-t)^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2tx + t^2 - 2 = 0$$

となる。 α, β はこの方程式の解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= t \\ \alpha\beta &= \frac{t^2 - 2}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $\beta - \alpha > 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{t^2 - 4 \cdot \frac{t^2 - 2}{2}} \\ &= \sqrt{4 - t^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha + \beta = t, \alpha\beta = \frac{t^2 - 2}{2}, \beta - \alpha = \sqrt{4 - t^2}$$

(ii)

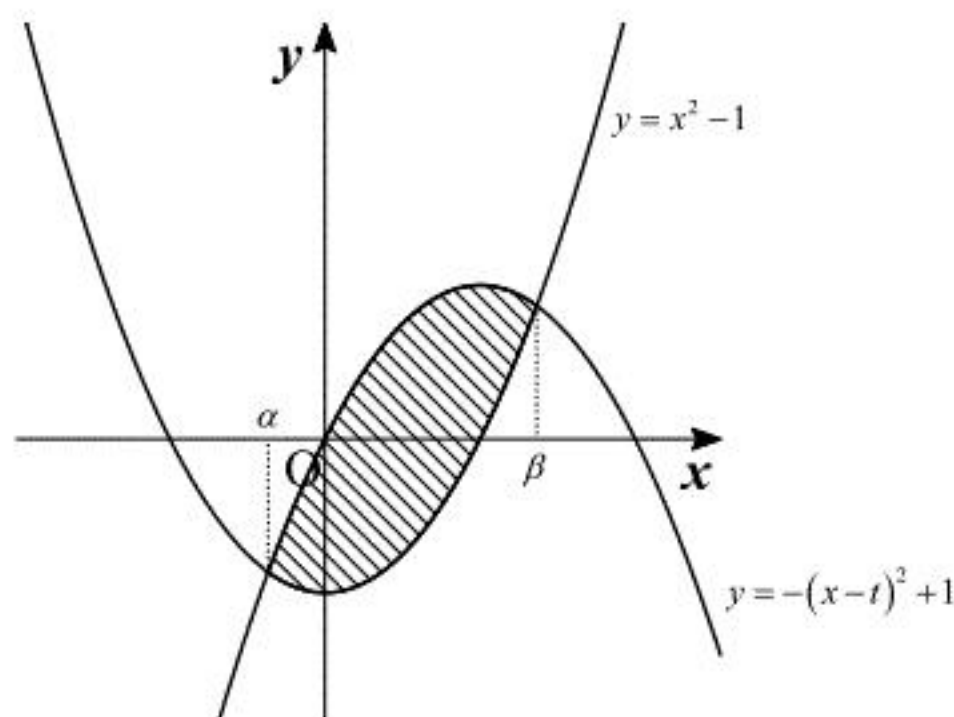
(i)の結果より

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = t^2 - \frac{t^2 - 2}{2} = \frac{t^2 + 2}{2}$$

となる。

$$(答) \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \frac{t^2 + 2}{2}$$

(iii)



C_1, C_2 を図示すると上図のようになる。よって、求める面積は図の斜線部の面積であり、

$$\begin{aligned}S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -(x-t)^2 + 1 - (x^2 - 1) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - 2tx + t^2 - 2) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= (-2) \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(4 - t^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = \frac{1}{3}(4 - t^2)^{\frac{3}{2}}$$

(iv)

(iii)の結果と $-2 < t < 2$ より、 $4 - t^2$ が最大値をとるとき、すなわち $t = 0$ のとき S は最大値をとり、その値は

$$\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8}{3}$$

である。

$$(答) \quad S \text{ の最大値 } \frac{8}{3}$$

最大値をとるときの t の値 $t = 0$