

I

〔解答〕

(i)	ア			
	3			
(ii)	ウ			
	256			
(iii)	エ			
	$-\frac{4}{3}$			
(iv)	オ			
	120°			
(v)	カ			
	$\frac{1}{3}$			
(vi)	キ	ク	ケ	
	0	1	2	
(vii)	コ	サ	シ	ス
	1	$\sqrt{2}$	4	3
(viii)	セ			
	38			

〔解説〕

(i)

$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} a+\frac{1}{a} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2+\frac{1}{a^2} &= \left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2 \\ &= 9-2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

与式を変形すると

$$\begin{aligned} \log_x 64 &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_2 x = 8 \\ \therefore x &= 2^8 = 256 \end{aligned}$$

となる。

(iii)

ベクトルの平行条件より、 k を実数として $\vec{a}+2\vec{b}=k\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$ とできる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \vec{a}+2\vec{b} &= k\left(3\vec{a}-\vec{b}\right) \\ \Leftrightarrow (8, x-4) &= k(3, 3x+2) \\ \therefore 8 &= 3k \text{ かつ } x-4 = k(3x+2) \end{aligned}$$

とできる。これを解いて $k=\frac{8}{3}$, $x=-\frac{4}{3}$ とわかる。

(iv)

余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}$$

となる。 $0^{\circ}<\theta<180^{\circ}$ より $\theta=120^{\circ}$ である。

(v)

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-6(a+1)x+6a \\ &= 6(x-1)(x-a) \end{aligned}$$

となる。与えられた条件より $a<1$ であるから、増減表は次のようになる。

x	...	a	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小
			↘	極小	↗

ゆえに、極小値は $f(1)$ であるので

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2-3(a+1)+6a &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(vi)

$$4a_2+1=9=3\cdot3+0$$

より、 $a_3=0$ である。また、

$$4a_3+1=1=3\cdot0+1$$

より、 $a_4=1$ となる。ここで、 a_{n+1} は a_n のみに依存し、また、 $a_1=a_4$ であることから、数列 $\{a_n\}$ は 1, 2, 0 を繰り返すことが分かる。繰り返しの周期は 3 であるから、

$$a_{2018}=a_{2015}=a_{2012}=\cdots=a_2=2$$

である。

(vii)

方程式 $f(x)=0$ が $x=-1$ を重解に持つことから、 $f(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れ、また、 $f(x)$ は実係数多項式であるため、方程式 $f(x)=0$ は $1-\sqrt{2}i$ と共役な複素数 $1+\sqrt{2}i$ を解に持つので

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2(x-1+\sqrt{2}i)(x-1-\sqrt{2}i) \\ &= (x^2+2x+1)(x^2-2x+3) \\ &= x^4+4x+3 \end{aligned}$$

とわかる。

(viii)

C, D を結ぶ区間を通ることができるすると、最短距離で A から B まで行く道順は ${}_8C_3=56$ (通り)

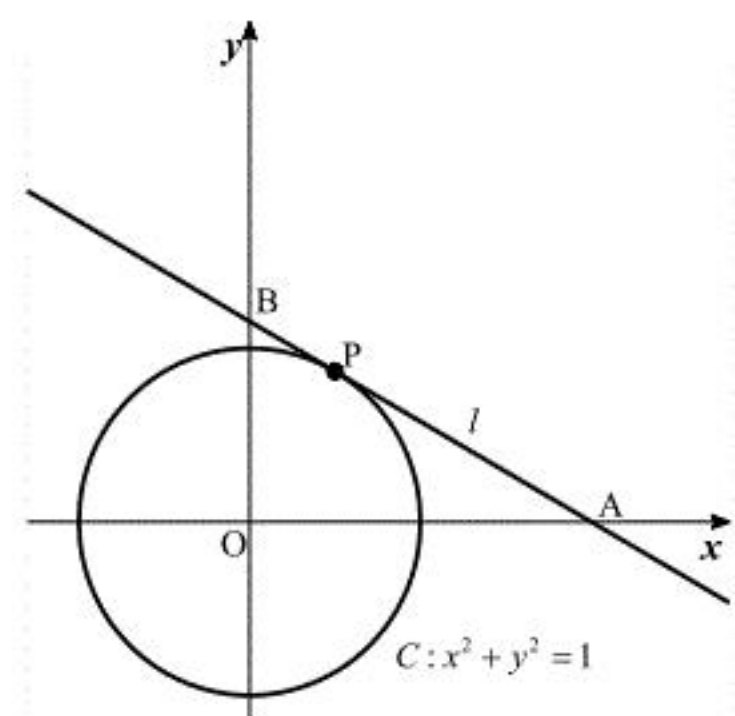
ある。次に C, D を結ぶ区間を必ず通って最短距離で A から B まで行く道順は

$${}_3C_1\cdot{}_4C_2=18 \text{ (通り)}$$

ある。よって、求める道順は、

$$56-18=38 \text{ (通り)}$$

である。



(i)

l の方程式は

$$\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y = 1$$

である。 $0 < \cos \theta < 1, 0 < \sin \theta < 1$ より A, B の座標は

$$A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

(ii)

$0 < 2\theta < \pi$ より

$$0 < \sin 2\theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{2}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = t$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t \geq 2$$

(iii)

(i)より

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= t^2 \left(1 + \frac{2}{t}\right) \\ &= t^2 + 2t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad L^2 = t^2 + 2t$$

(iv)

(iii)より

$$L^2 = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$$

となる。 $t \geq 2$ であるので L^2 は $t=2$ のとき最小値 8 をとる。ここで、 $L > 0$ であるから、 L^2 が最小となるとき、 L も最小となる。したがって、 L の最小値は $2\sqrt{2}$ である。また、 $t=2$ となるのは $\sin 2\theta = 1$ となるときであり、このとき

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad L \text{ の最小値: } 2\sqrt{2}, P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

III

(i)

$m=2$ のとき(2)は

$$-1 \leq n \leq 2$$

となる。 n は整数であるから、 $n=-1, 0, 1, 2$ である。

(答) $n=-1, 0, 1, 2$

(ii)

(i)より $m=2$ のとき P が $y=-x+1$ 上にあるような (m, n) は $(m, n)=(2, -1)$ である。また、

$m=1$ のとき(2)は

$$-2 \leq n \leq 2$$

となる。このうち P が $y=-x+1$ 上にあるような (m, n) は $(m, n)=(1, 0)$ である。 $m=3$ のとき

(2)は

$$2 \leq n \leq 2$$

$$\therefore n=2$$

となり、このとき P は $y=-x+1$ 上にない。以上から P が $y=-x+1$ 上にあるとき (m, n) は

$$(m, n)=(2, -1), (1, 0)$$

である。

(答) $(m, n)=(2, -1), (1, 0)$

(iii)

$y=kx+1$, $y=x^2-2x-1$ から y を消去すると

$$kx+1=x^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-(2+k)x-2=0$$

となる。 α, β は上の二次方程式の解である。解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=2+k, \alpha\beta=-2$$

となる。

(答) $\alpha+\beta=2+k$

(iv)

三角形 OPQ の面積は

$$S=\frac{1}{2}|a(k\beta+1)-(k\alpha+1)\beta|$$

$$=\frac{1}{2}|a-\beta|$$

と表せる。ゆえに、

$$S^2=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$$

$$=\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

$$=\frac{1}{4}\{(k+2)^2+8\}$$

となる。

(答) $S^2=\frac{1}{4}\{(k+2)^2+8\}$

(v)

$S>0$ より、 S^2 が最小となるときに S も最小となる。ここで、

$$S^2=\frac{1}{4}\{(k+2)^2+8\} \geq \frac{1}{4}(0^2+8)=2$$

であり等号は $k=-2$ で成立する。また、 $k=-2$ とすると、 $n=-2m+1$ であり、これと(1), (2)を満たす m, n の組は $(m, n)=(1, -1)$ となるから、 S^2 は $k=-2$ で最小値をとる。したがって、求める k の値は -2 である。

(答) $k=-2$