

I

【解答】

(i)	ア	イ	
	-4	1	
(ii)	ウ	エ	
	-6	1	
(iii)	オ		
	97		
(iv)	カ	キ	ク
	1	$-\frac{238}{169}$	0
(v)	ケ	コ	
	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	
(vi)	サ	シ	
	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	
(vii)	ス	セ	
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
(viii)	ソ		
	$2n^3-3n^2+n+2$		

【解説】

(i)

c, d, e を有理数とする。 $c+d\sqrt{e}$ が無理数であり、有理係数の方程式が $c+d\sqrt{e}$ を解にもつとき、 $c-d\sqrt{e}$ も解となる。よって、2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解は $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$ となる。したがって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} a=-(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3}) \\ b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases}$$

である。

(ii)

$2x^3+ax+b$ を $(x-1)^2$ で割ると、

$$2x^3+ax+b=(2x+4)(x-1)^2+(a+6)x+b-4$$

となる。この余りの部分が x に関して恒等的に -3 となるため、

$$\begin{cases} a+6=0 \\ b-4=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=1 \end{cases}$$

である。

(iii)

$n+3$ は 5 の倍数であるため、ある整数 l を用いて、

$$n+3=5l \Leftrightarrow n=5l-3$$

とできる。ここで、 $n+5$ は 3 の倍数であるため、

$$n+5=5l+2$$

より、 $5l+2$ も 3 の倍数となる。したがって、以下 3 を法とすると、

$$\begin{aligned} 5l+2 &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow 2l+2 &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow l+1 &\equiv 0 \quad (\because 2, 3 \text{ は互いに素}) \\ \therefore l &\equiv 2 \end{aligned}$$

となるため、 l は k を整数として、 $l=3k+2$ として表せる数である。よって、

$$\begin{aligned} n &= 5l-3 \\ &= 5(3k+2)-3 \\ &= 15k+7 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $n \leq 100$ のもと n が最大となるのは $k=6$ のときであり、このとき、 $n=97$ である。

(iv)

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= |z|^2 \\ &= \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 \\ &= \frac{25+144}{169} \\ &= 1 \end{aligned}$$

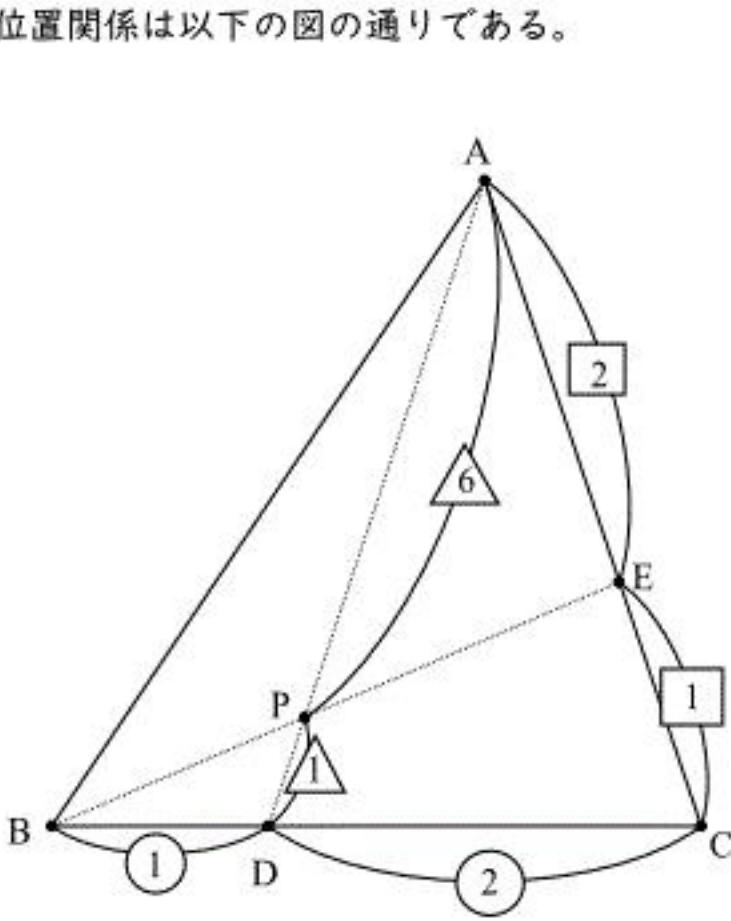
である。また、 $z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z} \quad (\because z \neq 0)$ より

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{z^2} &= z^2 + \bar{z}^2 \\ &= 4\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - 2z\bar{z} \\ &= 4\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 2 \\ &= -\frac{238}{169} \end{aligned}$$

であるため、 $a=-\frac{238}{169}, b=0$ となる。

(v)

$\triangle ABC$ と点 D, E, F の位置関係は以下の図の通りである。



よって、メネラウスの定理により

$$\begin{aligned} \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{DP}{PA} &= 1 \\ \therefore DP:PA &= 1:6 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{6}{7}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立であるため、 $s=\frac{4}{7}, t=\frac{2}{7}$ である。

(vi)

袋の中から玉を2個取り出す方法は ${}_5C_2=10$ (通り)あり、それらはすべて同様に確からしく起こる。袋から取り出した2個の玉に書かれた数の和が奇数となるのは、偶数が書かれた玉と奇数が書かれた玉を1個ずつ取り出したときであり、そのような事象が発生する確率は

$$\frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$$

である。袋から取り出した2個の玉に書かれた数の積が偶数となることの余事象は、袋から取り出した2個の玉に書かれた数の積が奇数となることであり、このようなことが起こるのは、箱から取り出した2個の玉に書かれた数がいずれも奇数であるときである。以上より、袋から取り出した2個の玉に書かれた数の積が偶数となる確率は、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{10} &= 1 - \frac{3}{10} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

である。

(vii)

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ \Leftrightarrow 1+a+b &= 1 \\ \therefore a &= -b \end{aligned}$$

である。また、 x^2+b は偶関数、 ax は奇関数であるため、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2+ax+b) dx &= 2 \int_0^1 (x^2+b) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + bx \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + 2b \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a=-b \\ \frac{2}{3} + 2b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

である。

(viii)

与式より $a_{n+1}-a_n=6n^2$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} 6k^2 \\ \Leftrightarrow a_n - a_1 &= 6 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\ \Leftrightarrow a_n - a_1 &= n(n-1)(2n-1) \\ \therefore a_n &= 2n^3 - 3n^2 + n + 2 \quad (\because a_1=2) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成立する。以上より、 $a_n=2n^3-3n^2+n+2$ である。

II

(i)

2つの2次方程式①②に $x=c$ を代入すると,

$$\begin{cases} c^2 - tc + s = 0 \\ c^2 - sc + t = 0 \end{cases}$$

となる。ここで、上式から下式を引くと,

$$\begin{aligned} (s-t)c &= -(s-t) \\ \Leftrightarrow c &= -1 \quad (\because s \neq t) \end{aligned}$$

である。

(答) $c = -1$

(ii)

$c^2 - tc + s = 0$ に $c = -1$ を代入すると,

$$1 + t + s = 0 \Leftrightarrow s = -t - 1$$

となる。

(答) $s = -t - 1$

(iii)

2次方程式①について、解と係数の関係より,

$$\begin{aligned} t &= a + c \\ &= a - 1 \quad (\because c = -1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a = t + 1$ である。

(答) $a = t + 1$

(iv)

2次方程式②について、解と係数の関係より,

$$\begin{aligned} t &= bc \\ &= -b \quad (\because c = -1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $b = -t$ である。

(答) $b = -t$

(v)

(i), (iii), (iv)より

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (t+1)^2 + (-t)^2 + (-1)^2 \\ &= 2(t^2 + t + 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $2(t^2 + t + 1)$

(vi)

(問題不備により全員得点)

Ⅲ

(i)

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$ であるため、

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$$

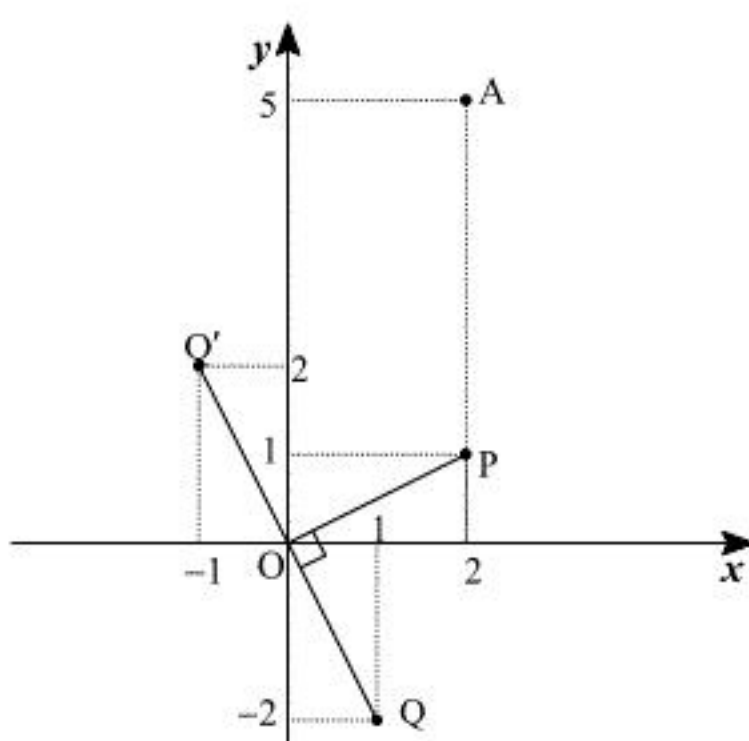
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (2, 1)$$

となる。以上より、 $(a, b) = (2, 1)$ である。

(答) $(a, b) = (2, 1)$

(ii)



ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直であるベクトルの1つとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が存在するため、 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OQ'}$ はどちらも

実数 t を用いて、 $t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表せる。このとき、 $|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OQ'}| = \sqrt{5}$ より、

$$\left| t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |t| \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |t| \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |t| = 1$$

$$\therefore t = \pm 1$$

である。ここで、点 Q の x 座標は正であるため、

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

(答) $Q(1, -2), Q'(-1, 2)$

(iii)

点 $Q(1, -2), Q'(-1, 2), A(2, 5)$ の座標を方程式 $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ にそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} 1 + 4 + l - 2m + n = 0 \\ 1 + 4 - l + 2m + n = 0 \\ 4 + 25 + 2l + 5m + n = 0 \end{cases}$$

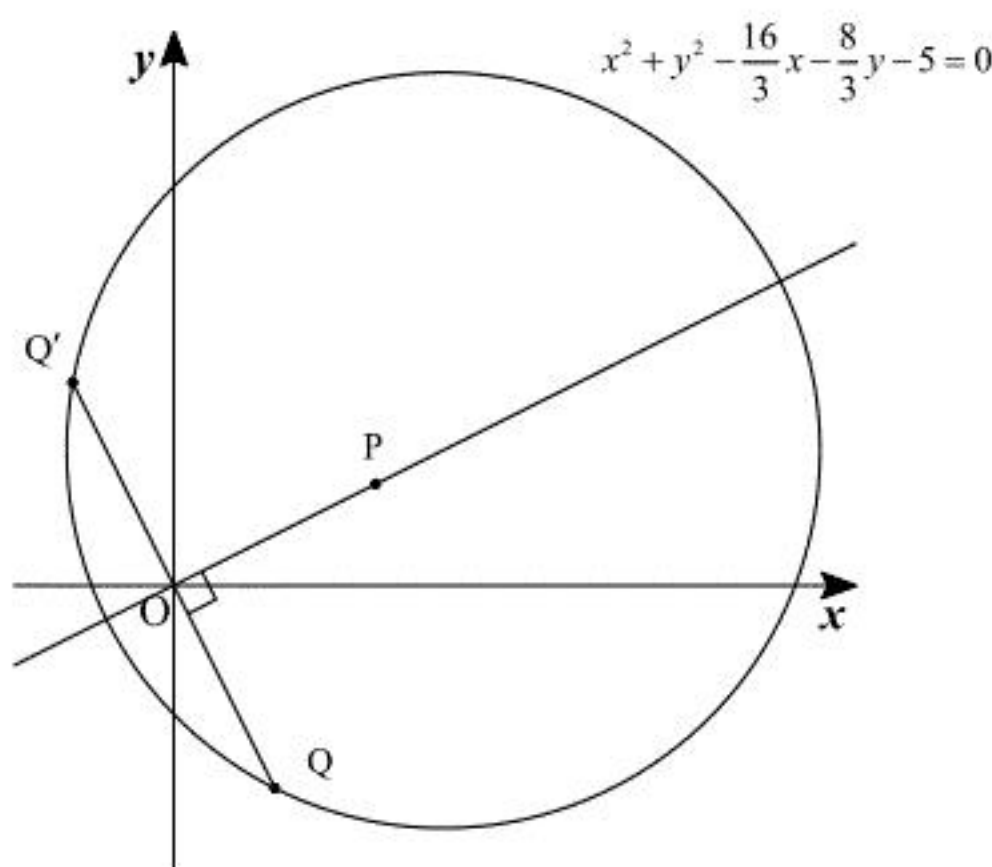
$$\Leftrightarrow \begin{cases} l - 2m + n = -5 \\ -l + 2m + n = -5 \\ 2l + 5m + n = -29 \end{cases}$$

$$\therefore (l, m, n) = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}, -5 \right)$$

となる。

(答) $(l, m, n) = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}, -5 \right)$

(iv)



線分 QQ' の中点が O であることと、 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{OQ'}, \overrightarrow{OQ'} \perp \overrightarrow{OP}$ であることより、線分 QQ' の垂直二

等分線は直線 OP であり、この直線を表す方程式は $y = \frac{1}{2}x$ である。また、(iii)の円の方程式は

$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}$ と変形できるため、 $y = \frac{1}{2}x$ を $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}$ に代入すると、

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{8}{3} = \pm \frac{10}{3}$$

$$\therefore x = 6, -\frac{2}{3}$$

となる。よって、交点の座標は $(6, 3), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ である。

(答) $(6, 3), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(v)

線分 QQ' を $\triangle QQ'T$ の底辺とみなすと、点 T が直線 QQ' から最も離れているとき、 $\triangle QQ'T$ の面積が最大となる。それは、点 T が(iv)で求めた2点のうち、 O からより離れている方に存在するときである。ここで、

$$|6 - 0| = 6 > \frac{2}{3} = \left| -\frac{2}{3} - 0 \right|$$

であるため、そのような点 T の座標は、 $T(6, 3)$ である。このとき、 $\triangle QQ'T$ の面積は

$$\frac{1}{2} QQ' \cdot OT = \frac{1}{2} \sqrt{(-1-1)^2 + \{2-(-2)\}^2} \sqrt{3^2 + 6^2}$$

$$= 15$$

である。

(答) 15