

I

【解答】

(i)	ア	イ
	真	偽
(ii)	ウ	エ
	$-6 < x < 1$	$2 < x < 3$
(iii)	オ	カ
	1	-3
(iv)	キ	
	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	
(v)	ク	ケ
	7	$\frac{5}{2}$
(vi)	コ	
	22	
(vii)	サ	
	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
(viii)	シ	
	$1 < m < \frac{3}{2}$	

【解説】

(i)

命題「 $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ 」の対偶は、「 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」である。これは真であるから、命題「 $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ 」は真である。また、命題「 $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ 」の裏は、「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」である。これは、 $x = -1$ が反例であるから、偽である。

(ii)

$$x^2 - |5x - 6| < 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 < |5x - 6|$$

である。ここで、この不等式は両辺非負であるから、

$$x^2 < |5x - 6|$$
$$\Leftrightarrow (x^2)^2 < |5x - 6|^2$$
$$\Leftrightarrow x^4 < (5x - 6)^2$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 60x - 36 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 - 24x + 36) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x^2 + 3x - 18) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 6) > 0$$
$$\Leftrightarrow -6 < x < 1, 2 < x < 3$$

である。

(iii)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

以上より、 $f(x)$ の極大値は1、極小値は-3となる。

(iv)

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

である。

(v)

z 座標に着目すれば、

$$(x, 4, -2) - (3, 3, 0) = 2 \cdot \{(3, 3, 0) - (1, y, 1)\}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \cdot (3 - 1) \\ 4 - 3 = 2 \cdot (3 - y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(7, \frac{5}{2} \right)$$

であると分かる。

(vi)

$$0.9^n < 0.1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{10} \right)^n < \left(\frac{1}{10} \right)$$
$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{9}{10} \right)^n < \log_{10} \left(\frac{1}{10} \right)$$
$$\Leftrightarrow n(2 \log_{10} 3 - 1) < \log_{10} \left(\frac{1}{10} \right)$$
$$\Leftrightarrow n(2 \cdot 0.4771 - 1) < -1$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{0.0458}$$
$$\Leftrightarrow n > 21.83 \dots$$

であるから、条件を満たすような最小の整数の n は、 $n = 22$ である。

(vii)

正四面体の回転対称性より、 $\angle AGB = 90^\circ$ である。直線GBと直線CDの交点をHとすると、

三角形BCDが正三角形であることから $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。Gは三角形BCDの重心であるから

$$GB = \frac{2}{3}BH$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

であるから、三平方の定理より、

$$AG = \sqrt{AB^2 - GB^2}$$
$$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。

(viii)

与えられた2次方程式の判別式を D とおくと、これが異なる2つの実数解を持つ為の必要十分条件は、

$$\frac{D}{4} > 0$$
$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (-8m + 12) > 0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 12 > 0$$
$$\Leftrightarrow (m + 3)(m - 1) > 0$$
$$\Leftrightarrow m < -3, 1 < m$$

である。解と係数の関係を考えれば、これらがいずれも正である為の必要十分条件は、

$$\begin{cases} 4m > 0 \\ -8m + 12 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$$

である。先程の条件と合わせて考えれば、問の条件を満たす為の必要十分条件は、 $1 < m < \frac{3}{2}$

であると分かる。

II

(i)

$$\begin{aligned}t^2 &= (\sin x - \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 1 - 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \frac{1-t^2}{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}f(x) &= 4a \sin x - 4a \cos x + \sin 2x \\ &= 4a(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x \\ &= 4at + 2 \cdot \frac{1-t^2}{2} \\ &= -t^2 + 4at + 1\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad f(x) = -t^2 + 4at + 1$$

(iii)

$$\begin{aligned}t &= \sin x - \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq \pi$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ である。以上より、

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

(iv)

$g(t) = -t^2 + 4at + 1$ とおく。 $f(x)$ の定義と t の範囲から、 $g(t)$ の $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ での最大値と $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ での最大値は一致する。ここで、

$$\begin{aligned}g(t) &= -t^2 + 4at + 1 \\ &= -(t - 2a)^2 + 1 + 4a^2\end{aligned}$$

である。 a は 0 以上の定数であることに注意すると、以下のように場合分けを行うことが出来る。

$$[1] \quad 0 \leq 2a < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}$$

$g(t)$ は、 $t = 2a$ で最大値

$$g(2a) = 4a^2 + 1$$

を取る。

$$[2] \quad \sqrt{2} \leq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \text{ のとき}$$

$g(t)$ は、 $t = \sqrt{2}$ で最大値

$$\begin{aligned}g(\sqrt{2}) &= -2 + 4\sqrt{2}a + 1 \\ &= 4\sqrt{2}a - 1\end{aligned}$$

を取る。

以上[1],[2]より $g(t)$ の最大値は、 $0 \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $4a^2 + 1$ であり、 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a$ のときは

$4\sqrt{2}a - 1$ である。

$$\text{(答)} \quad 0 \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad 4a^2 + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \text{ のとき} \quad 4\sqrt{2}a - 1$$

III

(i)

$n=1$ のもと①, ②, ③を満たす点は, $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ の3点であるから, $a_1=3$ である。
 $n=2$ のもと①, ②, ③を満たす点は, 前述の3点と, $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$ の3点であるから,
 $a_2=6$ である。 $n=3$ のもと①, ②, ③を満たす点は, 前述の6点と, $(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$
 の4点であるから, $a_3=10$ である。

(答) $a_1=3, a_2=6, a_3=10$

(ii)

$n=k+1$ のもと①, ②, ③を満たす点は, $n=k$ のもと①, ②, ③を満たす点と,
 $(k+1, 0), (k, 1), \dots, (1, k), (0, k+1)$ から成る。これより,

$$a_{k+1} = a_k + k + 2$$

が成立する。以上より, $n \geq 2$ のもとでは,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) \\ &= 3 + \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

である。これは, $n=1$ でも成立する。

$$(答) \quad a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(iii)

条件を満たす点は, $(0, 0), (1, 1), \dots, (m-2, m-2), (m-1, m-1)$ の m 個存在するから, $b_n=m$ である。

(答) $b_n=m$

(iv)

条件を満たす点は, $y > x$ である点と, $y = x$ である点と, $y < x$ である点から成る。これらのうち, $y = x$ である点は, (iii)より, m 個存在し, (ii)より, $y > x$ または $y < x$ である点は,

$$\begin{aligned} a_{2m-1} - b_{2m-1} &= \frac{2m \cdot (2m+1)}{2} - m \\ &= 2m^2 \end{aligned}$$

より, $2m^2$ 個存在する。ここで, ①, ②, ③の x, y に関する対称性から, $y > x$ である点と
 $y < x$ である点の数は等しい。以上より,

$$\begin{aligned} c_m &= m + \frac{2m^2}{2} \\ &= m(m+1) \end{aligned}$$

である。

(答) $c_m = m(m+1)$