

I

【解答】

(i)	ア
	(6, 4)
(ii)	イ
	140
(iii)	ウ
	$-\frac{45}{2}$
(iv)	エ
	$2 < x < \frac{19}{9}$
(v)	オ
	$2 \cdot 3^{n-2}$
(vi)	カ
	$-\frac{5}{27}$
(vii)	キ
	(4, 3), (−4, −3)
(viii)	ク
	15

【解説】

(i)

与式は、
$$(3x-2y-10)k+x-4y+10=0$$

と変形できる。この式が k についての恒等式となる条件は、

$$\begin{cases} 3x-2y-10=0 \\ x-4y+10=0 \end{cases}$$

である。これを解いて、 $(x,y)=(6,4)$ を得る。

(ii)

$\sqrt{1260n}$ が自然数となる条件は、 $1260n$ が平方数となることである。 1260 は $1260=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ と素因数分解できるので、 n の条件は、自然数 k を用いて、
$$n=5 \cdot 7 \cdot k^2$$
と表されることである。ゆえに、 $\sqrt{1260n}$ が自然数となるような n のうち、小さいほうから2番目の数は、 $k=2$ のときの $n=140$ である。

(iii)

2 次方程式 $2x^2-4x-5=0$ の2つの解 α, β について、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \alpha^3\beta+\alpha\beta^3 &= \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) \\ &= \alpha\beta\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\} \\ &= -\frac{5}{2}\left\{2^2-2\left(-\frac{5}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{45}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(iv)

真数条件より、
$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> 2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。次に、与式は、

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x-2) &> 2 \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-2) &> \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} \end{aligned}$$

となり、底は1より小さいから、

$$\begin{aligned} x-2 &< \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow x &< \frac{19}{9} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①かつ②より、 $2 < x < \frac{19}{9}$ を得る。

(v)

初項を a 、公比を $r(>0)$ と置くと、 $a_n=a \cdot r^{n-1}$ と書ける。問題の条件より、

$$\begin{cases} a \cdot r^2=6 & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ a \cdot r^5=162 & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成立する。③を④に代入して、

$$\begin{aligned} r^3 &= 27 \\ \therefore r &= 3 \left(\because r > 0 \right) \end{aligned}$$

が得られる。これと③より、 $a=\frac{2}{3}$ であり、求める数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} \\ &= 2 \cdot 3^{n-2} \end{aligned}$$

である。

(vi)

関数 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+2x-1 \\ &= (3x-1)(x+1) \end{aligned}$$

となる。よって、増減表は下表ようになる。

x	...	-1	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より、 $x=\frac{1}{3}$ のとき $f(x)$ は極小値をとる。したがって、極小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \int_0^{\frac{1}{3}}(3t^2+2t-1)dt \\ &= \left[t^3+t^2-t\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{5}{27} \end{aligned}$$

である。

(vii)

$z^2=7+24i$ について、

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+bi)^2 \\ &= a^2-b^2+2abi \end{aligned}$$

より、複素数の相等条件から、

$$\begin{cases} a^2-b^2=7 & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ 2ab=24 & \cdots \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

が得られる。まず、 $a=0$ を仮定すると⑥式が成り立たないため、 $a \neq 0$ を得る。これを踏ま

えると⑥式より、 $b=\frac{12}{a}$ が得られ、これを⑤式に代入すると、

$$\begin{aligned} a^2-\frac{144}{a^2} &= 7 \\ \Leftrightarrow a^4-7a^2-144 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2+9)(a^2-16) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2-16=0 \left(\because a^2+9 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow a &= \pm 4 \end{aligned}$$

が得られる。 $b=\frac{12}{a}$ であるので、 $(a,b)=(4,3),(-4,-3)$ を得る。

(viii)

○、○、○、○、X、Xの6つを並べることを考える。この並べ方は、

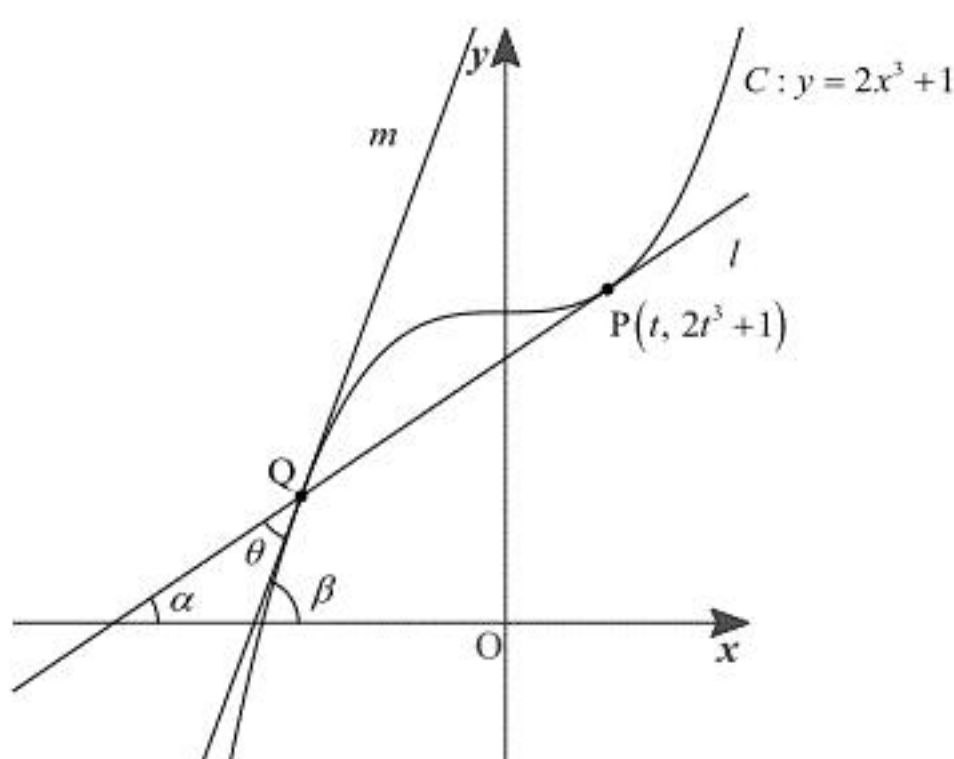
$$\frac{6!}{4! \cdot 2!}=15 \text{ (通り)}$$

である。○にA,B,C,Dをこの順に左から入れることで、この並べ方と題意を満たす並べ方は1対1に対応する。よって求める並べ方は15通りとなる。

II

(i)

問の状況を図示すると、下図のようになる。ただし、直線 l と x 軸がなす角を α 、直線 m と x 軸がなす角を β とする。



$y = 2x^3 + 1$ について、 $y' = 6x^2$ であるので、曲線 $C: y = 2x^3 + 1$ 上の点 $P(t, 2t^3 + 1)$ における接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (2t^3 + 1) &= 6t^2(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 6t^2x - 4t^3 + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a = 6t^2$ 、 $b = -4t^3 + 1$ である。

(答) $a = 6t^2$ 、 $b = -4t^3 + 1$

(ii)

点 Q は曲線 C 上、かつ直線 l 上に存在するので、その x 座標は、 $2x^3 + 1 = 6t^2x - 4t^3 + 1$ を満たす。これを解くと、

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6t^2x + 4t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = t, -2t \end{aligned}$$

となるが、 $x = t$ は点 P の x 座標であるので、点 Q の x 座標は $x = -2t$ である。

(答) $-2t$

(iii)

直線 m の傾きは点 Q における曲線 C の接線の傾きであるので、 $y' = 6x^2$ に $x = -2t$ を代入して、 $y' = 24t^2$ を得る。

(答) $24t^2$

(iv)

直線 m 、 l の傾きについて、 $\tan \alpha = 6t^2$ 、 $\tan \beta = 24t^2$ が成り立つ。ここで、上図より $\theta = \beta - \alpha$ であるから、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{24t^2 - 6t^2}{1 + 24t^2 \cdot 6t^2} \\ &= \frac{18t^2}{1 + 144t^4} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\tan \theta = \frac{18t^2}{1 + 144t^4}$

(v)

(iv)より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{18t^2}{1 + 144t^4} \\ &= \frac{18}{\frac{1}{t^2} + 144t^2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

であり、上式の分母について、 $\frac{1}{t^2} > 0$ 、 $144t^2 > 0$ より、相加相乗平均の関係から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} + 144t^2 &\geq 2\sqrt{\frac{1}{t^2} \cdot 144t^2} \\ &= 24 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号は $\frac{1}{t^2} = 144t^2$ 、すなわち $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ のとき成立する。よって、 $\tan \theta$ は $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ の

とき最大値 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ をとる。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\tan \theta$ は単調増加であるので、 θ が最大となるのは、

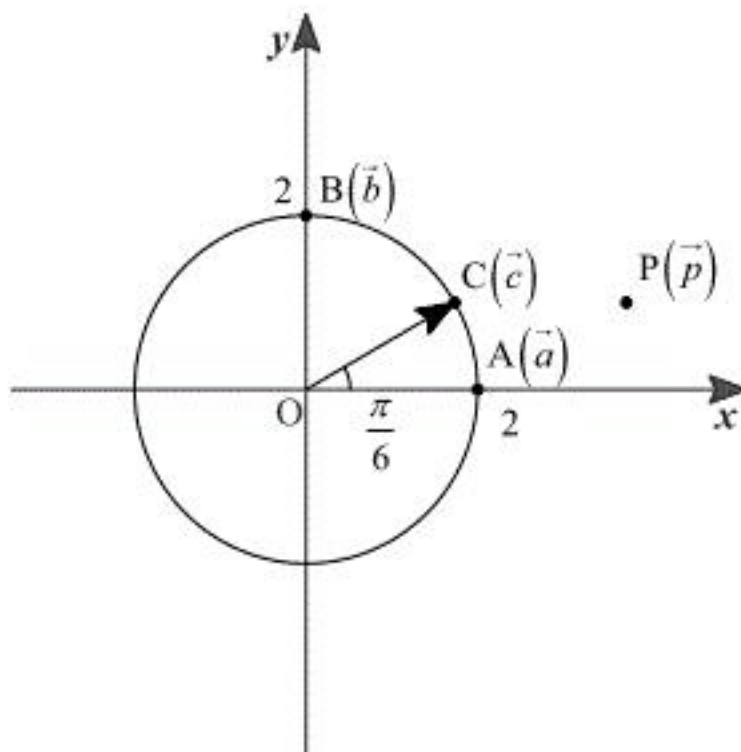
$\tan \theta$ が最大となるときであり、そのときの t の値は $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

(答) $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Ⅲ

(i)

題意より、 $\vec{a} = (2, 0)$ として、下図のように各点を座標平面上に置いても一般性を失わない。



図より、

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \left(2 \cos \frac{\pi}{6}, 2 \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= (\sqrt{3}, 1)\end{aligned}$$

であり、 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (0, 2)$ であるから、

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \sqrt{3} \cdot \frac{\vec{a}}{2} + 1 \cdot \frac{\vec{b}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}\end{aligned}$$

となる。よって、 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ である。

(答) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

(ii)

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{a} + \vec{c} \\ &= (2, 0) + (\sqrt{3}, 1) \\ &= (2 + \sqrt{3}, 1)\end{aligned}$$

であるので、求める内積の値は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BP}} &= -\vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) \\ &= -\vec{b} \cdot \vec{p} + |\vec{b}|^2 \\ &= -(0, 2) \cdot (2 + \sqrt{3}, 1) + 2^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

である。

(答) 2

(iii)

θ は $\overrightarrow{\text{BO}}$, $\overrightarrow{\text{BP}}$ がなす角であるので、

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{(\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BP}})^2}{|\overrightarrow{\text{BO}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\text{BP}}|^2} \\ &= \frac{2^2}{2^2 \cdot |\vec{p} - \vec{b}|^2} \\ &= \frac{1}{|\vec{p} - \vec{b}|^2}\end{aligned}$$

である。ここで、 $|\vec{p} - \vec{b}|^2$ について、

$$\begin{aligned}\vec{p} - \vec{b} &= (2 + \sqrt{3}, 1) - (0, 2) \\ &= (2 + \sqrt{3}, -1)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|\vec{p} - \vec{b}|^2 &= (2 + \sqrt{3})^2 + (-1)^2 \\ &= 8 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1}{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{(8 + 4\sqrt{3})(8 - 4\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

(iv)

三角関数の2倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 1 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(v)

(ii)より、 $\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BP}} > 0$ であるから、 $\cos \theta > 0$ であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ と言える。したがって、

$0 < 2\theta < \pi$ であり、(iv)より、 $\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるので、

$$\begin{aligned}2\theta &= \frac{5}{6}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\theta = \frac{5}{12}\pi$