

I.

(i)

放物線 $C:y=1-4x^2$ の導関数は

$$y'=-8x$$

であるから、 C 上の点 $P(t,1-4t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y=-8t(x-t)+1-4t^2\Leftrightarrow y=-8tx+1+4t^2$$

である。

$$(答) \quad y=-8tx+1+4t^2$$

(ii)

C 上の点 $P(t,1-4t^2)$ における法線 m の傾きを a とおくと、(i)の結果より

$$a\cdot(-8t)=-1\Leftrightarrow a=\frac{1}{8t} \left(\because t>0\right)$$

となる。したがって、求める方程式は

$$y=\frac{1}{8t}(x-t)+1-4t^2\Leftrightarrow y=\frac{x}{8t}+\frac{7}{8}-4t^2$$

である。

$$(答) \quad y=\frac{x}{8t}+\frac{7}{8}-4t^2$$

(iii)

直線 m と y 軸の交点は $Q(0,u)$ であることから、 t^2 を u を用いて

$$u=0+\frac{7}{8}-4t^2\Leftrightarrow t^2=\frac{7}{32}-\frac{u}{4}$$

と表せる。

$$(答) \quad t^2=\frac{7}{32}-\frac{u}{4}$$

(iv)

(iii)の結果より、 u は t を用いて $u=\frac{7}{8}-4t^2$ と表せる。 t が $t>0$ の範囲で動くとき、2 次関数

$u=\frac{7}{8}-4t^2$ のとり得る値の範囲は $u<\frac{7}{8}$ である。

$$(答) \quad u<\frac{7}{8}$$

(v)

$u>0$ のとき、 $PQ=u$ となる u の値は、(iii), (iv)の結果より

$$\begin{aligned} PQ^2&=u^2 \\ \Leftrightarrow t^2+\left(1-4t^2-u\right)^2&=u^2 \\ \Leftrightarrow\left(\frac{7}{32}-\frac{u}{4}\right)+\left\{1-4\left(\frac{7}{32}-\frac{u}{4}\right)-u\right\}^2&=u^2 \left(\because t=\frac{7}{32}-\frac{u}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 64u^2+16u-15&=0 \\ \Leftrightarrow(8u+5)(8u-3)&=0 \\ \therefore u&=\frac{3}{8} \left(\because 0<u<\frac{7}{8}\right) \end{aligned}$$

と求まる。このとき、 t の値は

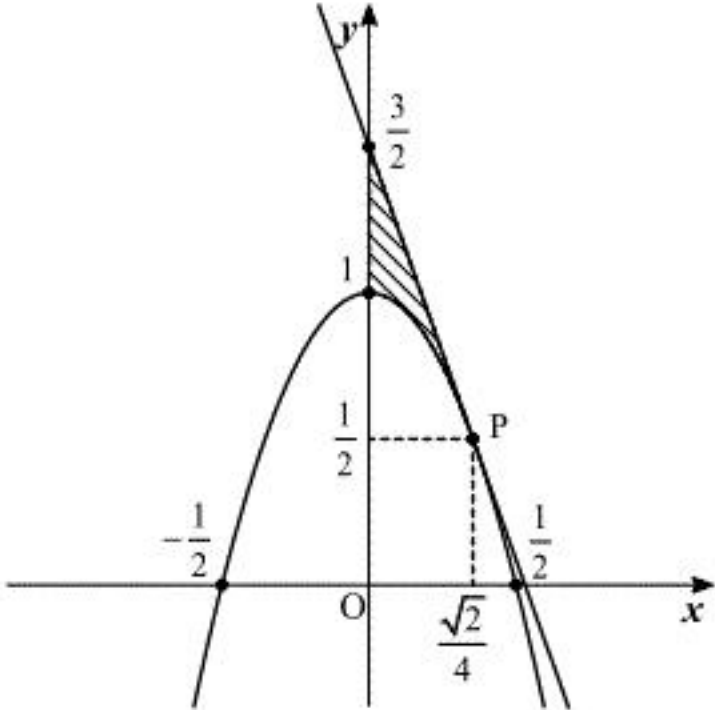
$$t^2=\frac{7}{32}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\because t>0\right)$$

である。

$$(答) \quad u=\frac{3}{8}, \quad t=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(vi)

t が(v)で求めた値であるとき、直線 l 、 y 軸、および放物線 C とで囲まれる図形は、以下の図の斜線部となる。



この図形を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V は、底面の半径が $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 、高さが1

の円錐の体積から放物線 C と直線 $y=\frac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる

立体の体積を引いたものとなる。したがって、 V の値は

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\cdot 1-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1x^2dy \\ &=\frac{\pi}{24}-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1-y}{4}dy \\ &=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{2}(1-y)^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{4}\left\{0-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\} \\ &=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{32} \\ &=\frac{\pi}{96} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad V=\frac{\pi}{96}$$

II.

(i)

以下のように S_n を定める。

$$\begin{cases} S_n = \sum_{j=1}^n a_j & (n \geq 1) \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

このとき、与えられた漸化式より、 $n \geq 1$ のとき

$$a_n = s + tS_{n-1}$$

が成立する。したがって、 $n \geq 1$ のとき、 a_{n+1} は a_n と t を用いて

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (s + tS_n) - (s + tS_{n-1}) \\ &\Leftrightarrow a_{n+1} = (1+t)a_n \quad (\because S_n - S_{n-1} = a_n) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = (1+t)a_n$$

(ii)

(i)の結果より、数列 $\{a_n\}$ は初項 s 、公比 $1+t$ の等比数列であることがわかる。したがって、 a_n を s, t, n を用いて表すと

$$a_n = s(1+t)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = s(1+t)^{n-1}$$

(iii)

与えられた漸化式の両辺を x^{n+1} ($x \neq 0$) で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{x^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{x^j}$$

となる。よって、 $c_n = \frac{b_n}{x^n}$ とおくと

$$c_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n c_j$$

となるから、ここで、 $s = 1 + \frac{1}{x}, t = \frac{1}{x}$ とおくと、(ii)の結果が適用でき、 c_n は x と n を用いて

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$$

と表せる。また、 $b_n = c_n x^n$ であるから、 b_n を x と n を用いて

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n x^n = (x+1)^n$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n, b_n = (x+1)^n$$

(iv)

(iii)の結果より、数列 $\{b_n\}$ は初項 $(x+1)$ 、公比 $(x+1)$ の等比数列であることがわかるから、無

限等比級数 $A = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するための条件は

$$\begin{aligned} (\text{初項}) &= 0 \quad \text{または} \quad -1 < (\text{公比}) < 1 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{または} \quad -1 < x+1 < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 0 \end{aligned}$$

である。また、そのときの A の値は

$$A = \frac{x+1}{1-(x+1)} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -2 < x < 0, \quad A = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

(v)

極限 B を変形すると

$$\begin{aligned} B &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m f_n \left(e^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left\{ \left(e^{\frac{1}{m}} - 1 \right) + 1 \right\}^n \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{\frac{n}{m}} \end{aligned}$$

となる。ここで、区分求積法を用いることで

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{\frac{n}{m}} &= \int_0^1 e^x dx \\ &= \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad e - 1$$