

I

【解答】

(i)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$
	$-\frac{1}{9}$	-1
(ii)	$\boxed{\text{ウ}}$	
	-2	
(iii)	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{27}{10}$
(iv)	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$
	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{33}$
(v)	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$
	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$

【解説】

(i)

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、 $f'(x) = 3ax^2$ であるから、

$$\begin{aligned} \{f'(x)\}^2 + xf'(x) + x &= 0 \\ \Leftrightarrow (3ax^2)^2 + x(ax^3 + b) + x &= 0 \\ \Leftrightarrow (9a^2 + a)x^4 + (b+1)x &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式がすべての実数 x に対して常に成り立つとき、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9a^2 + a = 0 \\ b+1 = 0 \end{cases} \\ \therefore a = -\frac{1}{9}, b = -1 \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

である。

(ii)

$\vec{a} \perp \vec{b}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{c}$ が成り立つとき、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のどれも零ベクトルではなく、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{かつ} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

が成り立つ。まず、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ について考えると、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow t \cdot 2 + (t+1) \cdot t + 2 \cdot (t+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)(t+2) &= 0 \\ \therefore t &= -3, -2 \end{aligned}$$

となる。また、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ について考えると、

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 0 + t \cdot (-1) + (t+3) \cdot t &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t+2) &= 0 \\ \therefore t &= -2, 0 \end{aligned}$$

となるから、条件を満たす t は $t = -2$ である。

(iii)

問題文より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a_1 r^{n-1}$ と表せるから、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 - 4a_3 = 1 \\ a_1 - 6a_2 + 9a_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 - 4r^2) = 1 \\ a_1(1 - 6r + 9r^2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 - 4r^2) = 1 \\ (3r - 1)^2 = 0 \quad (\because a_1 \neq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この連立方程式を解くと、 $r = \frac{1}{3}$ 、 $a_1 = \frac{9}{5}$ となる。ここで、 $|r| = \frac{1}{3} < 1$ より無限等比級数

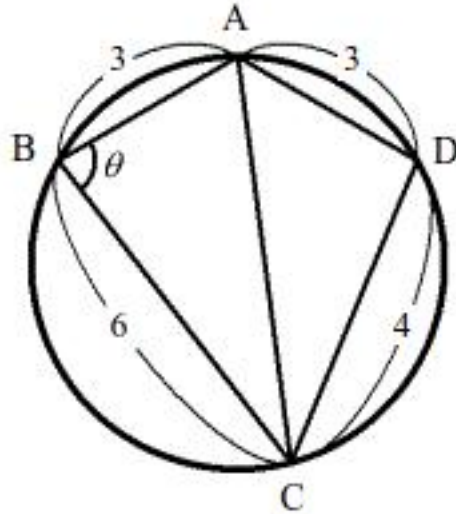
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し、その値は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{10}$$

となる。

(iv)

以下に、内接四角形 ABCD を図示する。



四角形 ABCD が円に内接しているから、 $\angle ADC = \pi - \theta$ である。ここで、余弦定理より、

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC & \dots \textcircled{1} \\ AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。①、②式から、 AC^2 を消去することで、

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cos \theta &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos(\pi - \theta) \\ \Leftrightarrow 45 - 36 \cos \theta &= 25 + 24 \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、①式より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 45 - 36 \cos \theta = 33 \\ \therefore AC &= \sqrt{33} \quad (\because AC > 0) \end{aligned}$$

となる。

(v)

z の式を整理して極形式で表すと、 k を整数として、

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{\pi}{6} + i \left(1 + \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{3} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。問題文より、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $r = \sqrt{3}$ 、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。

II

(i)

さいころの各目が出る確率は同様に確からしいとする。 $k=1$ となるのは、さいころが1つ出て、さらにその目が1のときである。したがって、求める確率は、

$$Q(1) = p \cdot \frac{1}{6} = \frac{p}{6}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad Q(1) = \frac{p}{6}$$

(ii)

$k=12$ となるのは、さいころが2つ出て、さらにその目が2つとも6のときである。したがって、求める確率は、

$$Q(12) = (1-p) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1-p}{36}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad Q(12) = \frac{1-p}{36}$$

(iii)

$1 \leq k \leq 6$ のとき、さいころがいくつ出るかによって場合分けをする。

[1] さいころが1つ出るとき

さいころの目が k であればよい。したがって、このときの確率は、

$$p \cdot \frac{1}{6} = \frac{p}{6}$$

となる。

[2] さいころが2つ出るとき

さいころの目の組は、 $2 \leq k \leq 6$ をみたす各 k に対して、

$$(1, k-1), (2, k-2), \dots, (k-1, 1)$$

の $k-1$ 通りである。また、 $k=1$ のときも0通りで成り立つ。したがって、このときの確率は、

$$(1-p) \cdot (k-1) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = (1-p) \cdot \frac{k-1}{36}$$

となる。

以上、[1], [2]より、[1]と[2]の場合は互いに排反な事象であるから、 $1 \leq k \leq 6$ のとき、

$$Q(k) = \frac{p}{6} + (1-p) \cdot \frac{k-1}{36}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad Q(k) = \frac{p}{6} + (1-p) \cdot \frac{k-1}{36}$$

(iv)

さいころの目は最大で6であるから、 $7 \leq k \leq 12$ であるとき、さいころは2つ出る。さいころの目の組は、各 k に対して、

$$(k-6, 6), (k-5, 5), \dots, (6, k-6)$$

の $6-(k-6)+1=13-k$ 通りである。したがって、 $7 \leq k \leq 12$ のとき、

$$Q(k) = (1-p) \cdot (13-k) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = (1-p) \cdot \frac{13-k}{36}$$

である。

$$\text{(答)} \quad Q(k) = (1-p) \cdot \frac{13-k}{36}$$

(v)

(iii), (iv)の結果より、

$$Q(6) = \frac{p}{6} + \frac{5(1-p)}{36}$$

$$Q(7) = \frac{6(1-p)}{36} = \frac{1-p}{6}$$

であるから、 $Q(6) = Q(7)$ となるときの p の値は、

$$\begin{aligned} \frac{p}{6} + \frac{5(1-p)}{36} &= \frac{6(1-p)}{36} \\ \therefore p &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad p = \frac{1}{7}$$

III

(i)

$f(x) = \log x + \frac{a}{x} - 2 \log 2 \ (x > 0)$ について、

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int \left(\log x + \frac{a}{x} - 2 \log 2 \right) dx \\ &= x \log x - x + a \log x - (2 \log 2)x \quad (\because x > 0) \\ &= (x+a) \log x - (2 \log 2 + 1)x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

である。

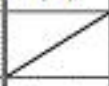
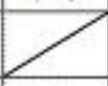
$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{x-a}{x^2}, \quad F(x) = (x+a) \log x - (2 \log 2 + 1)x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(ii)

(i)の $f'(x)$ の式より、 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = a$ である。また、問題文より $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ であり、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log x + \frac{a}{x} - 2 \log 2 \right) = \infty$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	最小	$\nearrow$	(∞)

増減表より、 $f(x)$ の最小値は $f(a) = \log a + 1 - 2 \log 2$ である。

$$(\text{答}) \quad \log a + 1 - 2 \log 2$$

(iii)

問題文の仮定より、

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t + \frac{a}{t} - 2 \log 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= t(-\log t + 2 \log 2) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{t}{2} + \frac{2a}{t} - 2 \log 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t + \frac{2a}{t} - 3 \log 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{t}{2}(-\log t + 3 \log 2) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。いま、定義域 $x > 0$ より $t > 0$ であることに注意すると、①、②式から a を消去することで、

$$\begin{aligned} t(-\log t + 2 \log 2) &= \frac{t}{2}(-\log t + 3 \log 2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}t(\log t - \log 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t - \log 2 &= 0 \quad (t > 0) \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

となる。また、このとき①式より、

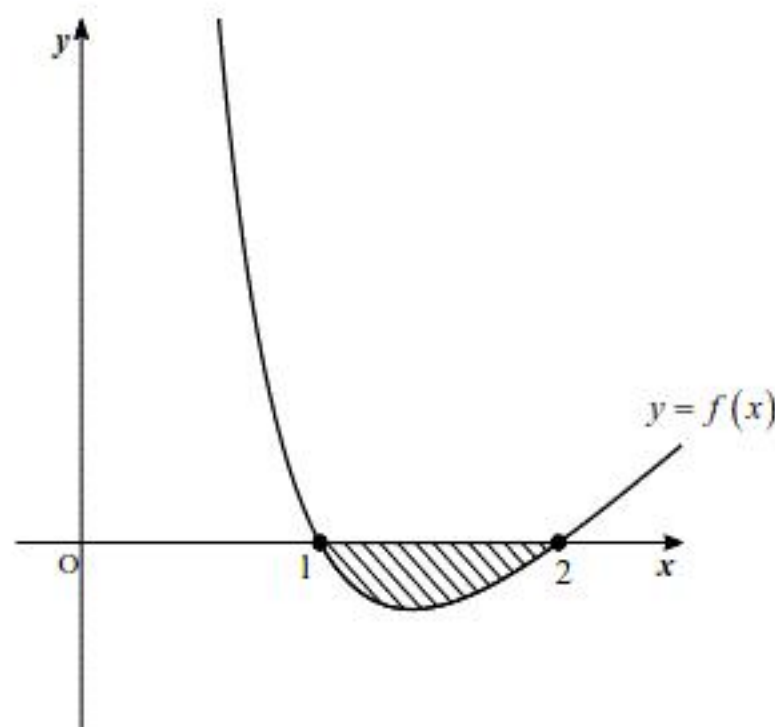
$$a = \frac{2}{2}(-\log 2 + 3 \log 2) = 2 \log 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = 2, a = 2 \log 2$$

(iv)

(iii)のとき、 $t = 2, a = 2 \log 2$ であり、 $f(1) = f(2) = 0$ である。また、(ii)で求めた $f(x)$ の増減表より、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。また、面積 S を斜線部で示す。



上図および(i)より、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{-f(x)\} dx \\ &= -[F(x)]_1^2 \\ &= -[(x+a) \log x + (2 \log 2 + 1)x]_1^2 \\ &= -\{(2+2 \log 2) \log 2 + 2(2 \log 2 + 1)\} + \{0 - (2 \log 2 + 1)\} \\ &= 1 - 2(\log 2)^2 \end{aligned}$$

である。したがって、 $A = 1, B = 0, C = -2$ である。

$$(\text{答}) \quad A = 1, B = 0, C = -2$$

IV

(i)

問題文より,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ a_2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_1 = 1, a_2 = 3$

(ii)

いま,

$$\begin{cases} b+c=a_1=1 \\ bc=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-1 \end{cases}$$

であるから, 解と係数の関係より b, c は 2 次方程式,

$$t^2-t-1=0$$

の解である。これより,

$$\begin{cases} b^2-b=1 \\ c^2-c=1 \end{cases}$$

を満たすから,

$$\begin{aligned} a_{n+2}-a_{n+1} &= b^{n+2}+c^{n+2}-b^{n+1}-c^{n+1} \\ &= b^n \cdot (b^2-b) + c^n \cdot (c^2-c) \\ &= b^n \cdot 1 + c^n \cdot 1 \\ &= a_n \end{aligned}$$

となる。したがって, $a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$ である。

(答) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$

(iii)

(iii)より, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ である。したがって, (ii)の結果より,

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 \\ &= (a_3 + a_2) + a_3 \\ &= 2(a_2 + a_1) + a_2 \\ &= 3a_2 + 2a_1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_5 = 11$

(iv)

すべての自然数に対して a_n が整数であることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(i)より, a_1, a_2 は整数である。

[2] $n=k, k+1$ のとき (k は自然数)

a_k, a_{k+1} が整数であると仮定すると, $n=k+2$ のとき, (ii)より,

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

であるから, a_{k+2} も整数である。

以上, [1], [2]よりすべての自然数 n に対して a_n は整数である。したがって,

$$\sin(2\pi a_n) = 0, \cos(2\pi a_n) = 1$$

となる。

(答) $\sin(2\pi a_n) = 0, \cos(2\pi a_n) = 1$

(v)

いま, $-1 \leq \sin(2\pi c^n) \leq 1$ および $b > 0$ より,

$$-\frac{1}{b^n} \leq \frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n} \leq \frac{1}{b^n}$$

である。また, $2 < \sqrt{5} < 3$ より $0 < \frac{2}{1+\sqrt{5}} < 1$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pm \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^n = 0$$

である。したがって, はさみうちの原理より $S = 0$ となる。

(答) $S = 0$

(vi)

$a_n = b^n + c^n$ より, (iv)の結果を用いて,

$$\begin{aligned} \sin(2\pi b^n) &= \sin\{2\pi(a_n - c^n)\} \\ &= \sin(2\pi a_n)\cos(2\pi c^n) - \cos(2\pi a_n)\sin(2\pi c^n) \\ &= -\sin(2\pi c^n) \end{aligned}$$

となる。また, $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi c^n = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0$$

である。したがって, T を変形すると,

$$\begin{aligned} T &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sin(2\pi c^n)}{c^n} \\ &= -2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{2\pi c^n} \end{aligned}$$

となり, $2\pi c^n = t$ とおくと $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから,

$$\begin{aligned} T &= -2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -2\pi \cdot 1 \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $T = -2\pi$