

2018年度

U 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア, イに「真」または「偽」のいずれかを記入せよ. また空欄ウ～シには当てはまる数または式を記入せよ.

(i) 実数 x に関する命題「 $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ 」は であり, この命題の裏は

である.

(ii) 不等式 $x^2 - |5x - 6| < 0$ を満たす x の範囲は または である.

(iii) 3次関数 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ の極大値は で, 極小値は である.

(iv) $\cos 105^\circ =$ である.

(v) 座標空間における3点 $(x, 4, -2), (3, 3, 0), (1, y, 1)$ が一直線上にあるとき, $x =$, $y =$ である.

(vi) $0.9^n < 0.1$ を満たす最小の整数 n は である. ただし, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(vii) 1辺の長さが1である正四面体ABCDで, 三角形BCDの重心をGとするととき, 線分AGの長さは である.

(viii) 2次方程式 $x^2 - 4mx - 8m + 12 = 0$ が異なる2つの正の解を持つとき, 定数 m の範囲は である.

Ⅱ. $0 \leq x \leq \pi$ を満たす実数 x に対して, $t = \sin x - \cos x$ とおく. また, a を 0 以上の定数として, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 4a \sin x - 4a \cos x + \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

とする. このとき, 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $\sin x \cos x$ を t を用いて表せ.

(ii) $f(x)$ を t を用いて表せ.

(iii) t の値の範囲を求めよ.

(iv) $f(x)$ の最大値を a を用いて表せ.

Ⅲ. n を自然数とする. 座標平面において以下の①～③の不等式を同時に満たす点 (x, y)

で, x, y がともに整数であるものの個数を a_n とする.

$$x \geq 0 \quad \cdots \text{①}$$

$$y \geq 0 \quad \cdots \text{②}$$

$$x + y \leq n \quad \cdots \text{③}$$

このとき, 次の問(i)～(iv)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) a_1, a_2, a_3 をそれぞれ求めよ.

(ii) a_n を n を用いて表せ.

(iii) ①, ②, ③に加え $y = x$ を満たす点 (x, y) で, x, y がともに整数であるものの個数を b_n とする. $n = 2m - 1$ とするとき, b_n を m の式で表せ. ただし, m は自然数とする.

(iv) ①, ②, ③に加え $y \geq x$ を満たす点 (x, y) で, x, y がともに整数であるものの個数を c_n とする. $n = 2m - 1$ とするとき, c_n を m の式で表せ. ただし, m は自然数とする.