

1.

【解答】

(i)	ア	イ
	-6	21
(ii)	ウ	
	$\frac{2n}{2n+1}$	
(iii)	エ	
	$\frac{45}{2}$	
(iv)	オ	カ
	19	-12
(v)	キ	
	$\frac{\pi}{15}$	
(vi)	ク	ケ
	$\frac{8}{3}$	$-\frac{29}{3}$
(vii)	コ	
	16	
(viii)	サ	
	$\frac{7}{20}$	

【解説】

(i)

$$(\text{左辺})=6ax^2+16ax+3bx^2+6bx-3(3x^2+14x+16)$$

$$=(6a+3b-9)x^2+(16a+6b-42)x-48$$

より、

$$(6a+3b-9)x^2+(16a+6b-42)x-48=18x^2-12x-48$$

である。これが x についての恒等式となるので、係数を比較して

$$\begin{cases} 6a+3b-9=18 \\ 16a+6b-42=-12 \end{cases}$$

が成立する。よって、これを解くと

$$(a,b)=(-6,21)$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$$

である。

(iii)

△ABCについて、余弦定理より、

$$\cos \angle BAC = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

が成立する。よって、求める内積は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = 5 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{2}$$

である。

(iv)

$y=3x^3+6x^2-2x$ と $y=x+6$ の2式から y を消去すると

$$3x^3+6x^2-2x=x+6$$

$$\Leftrightarrow 3x^3+6x^2-3x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2, \pm 1$$

と導ける。したがって、点Pの x 座標は、2つのグラフの共有点のうち x 座標が最大のものである

なので、1である。ゆえに、点Pの座標は(1, 7)である。ここで、 $f(x)=3x^3+6x^2-2x$ とおくと、 $f'(x)=9x^2+12x-2$ である。よって、点P(1, 7)における曲線Cの接線の方程式は、

$$y-7=f'(1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y=19x-12$$

である。

(v)

$$\sin 8\theta = \sin 7\theta$$

$$\Leftrightarrow \sin 8\theta - \sin 7\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos \frac{8\theta+7\theta}{2} \sin \frac{8\theta-7\theta}{2} = 0 \quad (\because \text{和積の公式})$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{15}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{16}$ であるから、 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ である。したがって、

$$\cos \frac{15}{2}\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2}\theta = \frac{2n+1}{2}\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 0 < \frac{15}{2}\theta < \frac{15}{16}\pi$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たすのは、 $n=0$ のときのみである。すなわち、

$$\frac{15}{2}\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{15}$$

となる。

(vi)

$P(x)=x^3+ax^2+bx+10$ とおくと、剰余の定理から、

$$P(-5)=0$$

$$\Leftrightarrow 25a-5b-115=0$$

$$\Leftrightarrow 5a-b=23$$

$$P(1)=4$$

$$\Leftrightarrow a+b+11=4$$

$$\Leftrightarrow a+b=-7$$

が成立する。よって、これらを解くと、

$$(a,b)=\left(\frac{8}{3}, -\frac{29}{3}\right)$$

である。

(vii)

$xy=16$ より、 $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy = \log_2 16 = 4$ が成り立つ。このことから、

$$(\log_2 x)^3 + (\log_2 y)^3 = (\log_2 x + \log_2 y) \{ (\log_2 x + \log_2 y)^2 - 3\log_2 x \log_2 y \}$$

$$= 4 \left\{ 16 - 3\log_2 x \log_2 \frac{16}{x} \right\}$$

と変形できる。よって、 $\log_2 x \log_2 \frac{16}{x}$ が最大値をとるとき与式は最小値をとる。ここで、

$$\log_2 x \log_2 \frac{16}{x} = \log_2 x (4 - \log_2 x)$$

$$= -(\log_2 x - 2)^2 + 4$$

であるので、 $x=4$ のとき、(与式)=16の最小値をとる。

(viii)

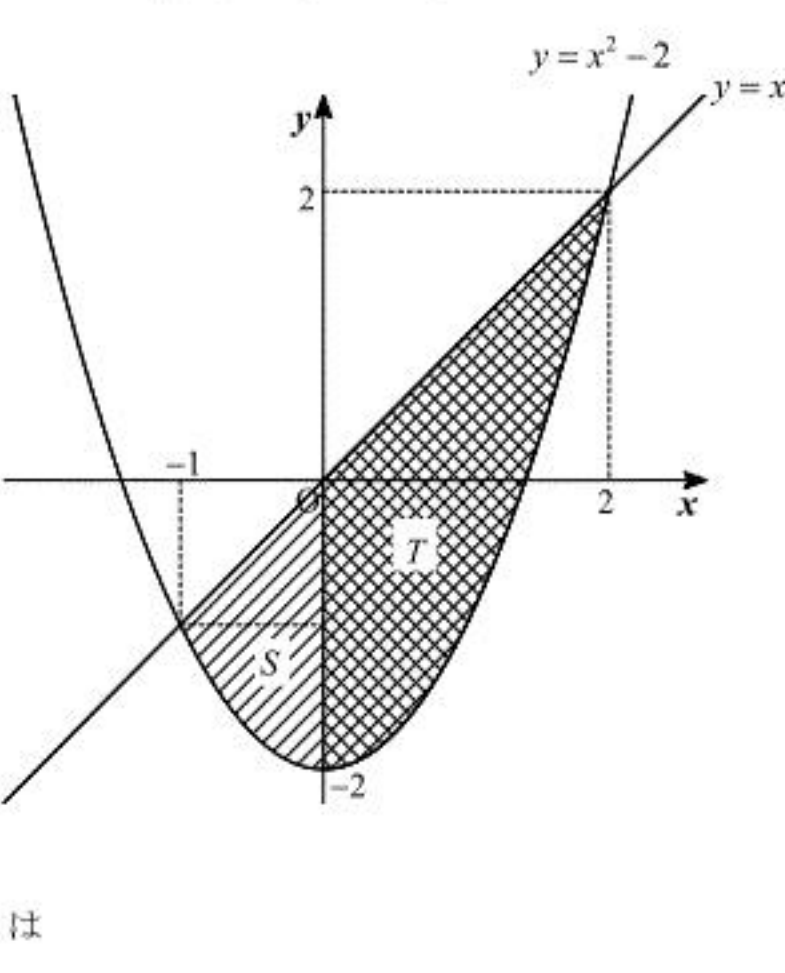
$y=x^2-2$ と $y=x$ の2式から y を消去すると、

$$x^2-2=x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2, -1$$

となる。ゆえに2つのグラフは下図のようになる。



したがって、面積 S, T は

$$S = \int_{-1}^0 \{x - (x^2 - 2)\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$T = \int_0^2 \{x - (x^2 - 2)\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2$$

$$= \frac{10}{3}$$

である。よって、

$$\frac{S}{T} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{10}{3}} = \frac{7}{20}$$

となる。

II.

(i)

箱 A, B から玉を1個ずつ取り出すとき、取り出し方はそれぞれ5通りであり同様に確からし

い。ここで、箱 A から玉を1個取り出すとき、白玉を取り出す確率は $\frac{1}{5}$ である。箱 B から玉を

1個取り出すとき、白玉を取り出す確率も同様に $\frac{1}{5}$ である。ここで、箱 A, 箱 B からそれぞれ

1個ずつ玉を取り出すとき、どちらか一方だけが白玉となるのは、

箱 A から白球を取り出し、かつ箱 B から白玉以外を取り出すとき

箱 A から白球以外を取り出し、かつ箱 B から白玉を取り出すとき

の2通りの場合があるから、求める確率は

$$\frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$$

となる。

(答) $\frac{8}{25}$

(ii)

箱 A, 箱 B から玉を1個ずつ取り出し、その2個の玉が同じ色であるとき、それが何色であるかは

$${}_5C_1 = 5 \text{ (通り)}$$

が考えられる。そのそれぞれの色について、箱 A, 箱 B からともに同じ色の玉を取り出す確率は

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

であるから、求める確率は

$$5 \times \frac{1}{25} = \frac{1}{5}$$

である。

(答) $\frac{1}{5}$

(iii)

同じ色の玉もそれぞれ区別して考える。箱 C から玉を同時に2個取り出すとき、その取り出し方は全部で

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (通り)}$$

存在し、またそれらは同様に確からしい。2個の玉が同じ色であるとき、それが何色であるかは(ii)同様5通りが考えられ、そのそれぞれの色についての玉の取り出し方は、箱の中に入っている同じ色の玉2個を両方とも取り出す ${}_2C_2 = 1$ (通り)のみ存在する。よって求める確率は

$$\frac{5 \times 1}{45} = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) $\frac{1}{9}$

(iv)

箱 C から玉を同時に5個取り出すとき、その取り出し方は全部で

$${}_{10}C_5 = 252 \text{ (通り)}$$

存在し、またそれらは同様に確からしい。取り出した玉の色が5種類となるのは、5色全てについてそれぞれ箱に入っている2個の玉のうちの1個ずつを取り出すときであるから、その取り出し方は

$$({}_2C_1)^5 = 32 \text{ (通り)}$$

である。よって求める確率は

$$\frac{32}{252} = \frac{8}{63}$$

となる。

(答) $\frac{8}{63}$

(v)

(iv)同様、玉の取り出し方は全部で252通り存在し、それらは同様に確からしい。どの色の玉も箱 C の中に2個ずつしか入っていないことを考えると、取り出した玉の色が4種類となるのは、ある1つの色の玉を2個取り出し、その他に異なる3色の玉をそれぞれ1個ずつ取り出すときである。ここで、取り出す4色の組み合わせは

$${}_5C_4 = 5 \text{ (通り)}$$

が考えられ、そのうち2個取り出す色が何色であるかは

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

が考えられる。2個取り出す色の玉の取り出し方は ${}_2C_2 = 1$ 通りであり、1個取り出す色の玉の取り出し方は ${}_2C_1 = 2$ (通り)であるから、求める確率は

$$\frac{5 \times 4 \times 1 \times 2^3}{252} = \frac{40}{63}$$

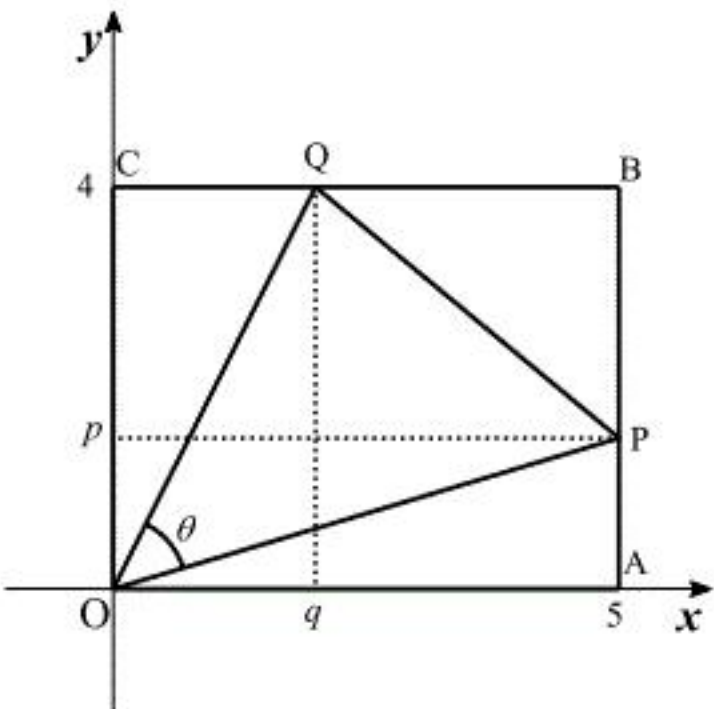
である。

(答) $\frac{40}{63}$

III.

(i)

問題文の条件を図示すると下図を得る。



$\triangle OPQ$ は長方形 $OABC$ から $\triangle OAP$, $\triangle PBQ$, $\triangle OCQ$ を除いた図形であるから

$$\begin{aligned} S &= 5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot p - \frac{1}{2} \cdot (4-p) \cdot (5-q) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot q \\ &= 10 - \frac{1}{2} pq \end{aligned}$$

となる。

(答) $10 - \frac{1}{2} pq$

(ii)

$S = 9$ より

$$\begin{aligned} 10 - \frac{1}{2} pq &= 9 \\ \Leftrightarrow pq &= 2 \end{aligned}$$

であり, $0 < q < 5$ より

$$p = \frac{2}{q}$$

となる。

(答) $p = \frac{2}{q}$

(iii)

$0 < p < 4$ であるから(ii)より

$$\begin{aligned} 0 < \frac{2}{q} < 4 \\ \Leftrightarrow q &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これと $0 < q < 5$ より

$$\frac{1}{2} < q < 5$$

である。

(答) $\frac{1}{2} < q < 5$

(iv)

S は θ を用いて

$$S = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \theta$$

と表すことができるから $S = 9$ のとき

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{OP \cdot OQ}{18}$$

である。ここで,

$$OP = \sqrt{p^2 + 25} = \sqrt{\frac{4}{q^2} + 25}$$

$$OQ = \sqrt{q^2 + 16}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\sqrt{\frac{4}{q^2} + 25} \cdot \sqrt{q^2 + 16}}{18} \\ &= \frac{\sqrt{25q^2 + \frac{64}{q^2} + 404}}{18} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{25q^2 + \frac{64}{q^2} + 404}}{18}$

(v)

(i)の図より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるので, $\sin \theta > 0$ である。よって,

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{25q^2 + \frac{64}{q^2} + 404}}{18}$$

が最小となるとき $\sin \theta$ は最大である。ここで, $25q^2 > 0, \frac{64}{q^2} > 0$ であるから相加平均・相乗平均の関係より

$$25q^2 + \frac{64}{q^2} \geq 2\sqrt{25q^2 \cdot \frac{64}{q^2}} = 80$$

であり, 等号が成立するのは

$$\begin{aligned} 25q^2 &= \frac{64}{q^2} \\ \Leftrightarrow q &= \pm \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

のときである。 $-\frac{2\sqrt{10}}{5} < \frac{1}{2} < \frac{2\sqrt{10}}{5} < 5$ より $q = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ は q の範囲に含まれるから, $q = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ の

とき等号が成立し $\frac{1}{\sin \theta}$ が最小値を取る。したがって, $q = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ のとき $\sin \theta$ は最大値

$$\frac{18}{\sqrt{80 + 404}} = \frac{9}{11}$$

をとる。

(答) $q = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ のとき最大値 $\frac{9}{11}$