

I.

【解答】

(i)	ア	ウ
	−56	
(ii)	イ	
	18	
(iii)	エ	
	−2	
(iv)	オ	
	−2	
(v)	カ	
	a^2-6a+4	
(vi)	キ	
	113	
(vii)	ク	
	$\sqrt{2}+1$	
(viii)	ケ	
	$\frac{5}{16}$	

【解説】

(i)

二項定理より、

$$\begin{aligned}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^8 &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k \left(x^2\right)^k \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{8-k} \\ &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k (-1)^{8-k} \left(x^2\right)^{2k-8} \\ &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k (-1)^{8-k} x^{4k-16}\end{aligned}$$

と変形できる。 $4k-16=4$ となるのは、 $k=5$ のときであるから、展開式における x^4 の係数は、

$$(-1)^{8-5} \cdot {}_8C_5 = -56$$

である。

(ii)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{28-12\sqrt{5}} &= \sqrt{28-2\sqrt{180}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{18}-\sqrt{10}\right)^2} \\ &= \sqrt{18}-\sqrt{10} \left(\because \sqrt{18}-\sqrt{10}>0\right)\end{aligned}$$

より、 $A=18$ 、 $B=10$ となる。

(iii)

$2^x=t$ とおく。ここで、 x は実数であるから、 $t>0$ である。不等式を変形すると、

$$\begin{aligned}4\cdot 4^x+2^{x+4}+3\cdot 2^x-5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4\cdot \left(2^x\right)^2+2^4\cdot 2^x+3\cdot 2^x-5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2+16t+3t-5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (4t-1)(t+5) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0<t\leq \frac{1}{4} (\because t>0) \\ \Leftrightarrow 0<2^x\leq 2^{-2} \\ \Leftrightarrow x &\leq -2\end{aligned}$$

である。

(iv)

与えられた数列が等差数列であるとき、等差中項の関係より、

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a+a^2}{2} \\ \Leftrightarrow a^2+a-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a-1) &= 0\end{aligned}$$

を満たす。ここで、公差が 0 でないため、 $a\neq 1$ である。よって、

$$a=-2$$

である。このとき、与えられた数列はたしかに公差 3 の等差数列になっている。

(v)

$g(x)=|x-2|+x-4$ とおくと、

$$g(x)=\begin{cases}2x-6 & (x\geq 2) \\ -2 & (x<2)\end{cases}$$

である。したがって、 $a>2$ のとき、

$$\begin{aligned}f(a) &= \int_0^a g(x) dx \\ &= \int_0^2 -2 dx + \int_2^a (2x-6) dx \\ &= -4 + \left[x^2-6x\right]_2^a \\ &= -4 + a^2 - 6a - 4 + 12 \\ &= a^2 - 6a + 4\end{aligned}$$

である。

(vi)

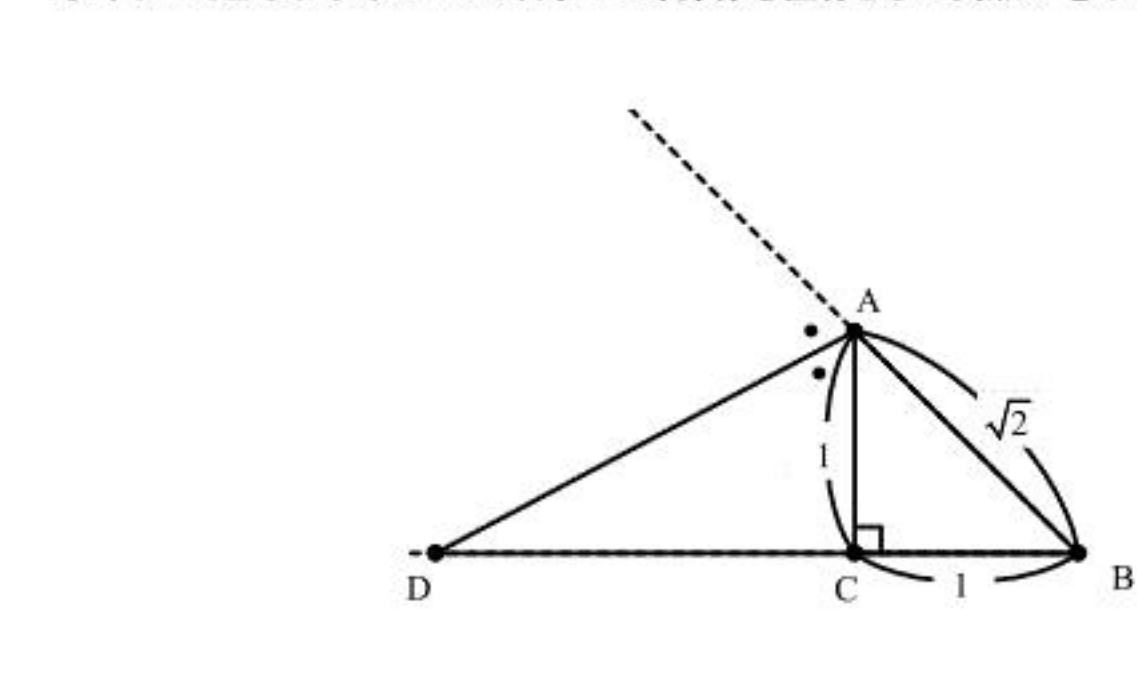
ユークリッドの互除法を用いると、

$$\begin{aligned}14803 &= 14351\cdot 1 + 452 \\ 14351 &= 452\cdot 31 + 339 \\ 452 &= 339\cdot 1 + 113 \\ 339 &= 113\cdot 3 + 0\end{aligned}$$

より、 14351 と 14803 の最大公約数は 113 である。

(vii)

以下に $\triangle ABC$ および $\angle A$ の外角の二等分線と直線 BC の交点 D を示す。



AB≠AC であるから、点 D は線分 BC を $AB:AC$ に外分する。したがって、

$$\begin{aligned}AB:AC &= BD:DC \\ \Leftrightarrow BD:DC &= \sqrt{2}:1\end{aligned}$$

が成立する。 CD の長さを x とおくと、

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x &= x+1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

である。

(viii)

コインを 6 回投げたとき、点 P が原点にいるのは、表と裏がともに 3 回出たときである。コインの表、裏の出方は同様に確からしいから、求める確率は、

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

である。

II.

(i)

$A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $P(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{6}\sin\theta)$ より,

$$\overrightarrow{PA} = (2 - \sqrt{6}\cos\theta, -\sqrt{6}\sin\theta)$$

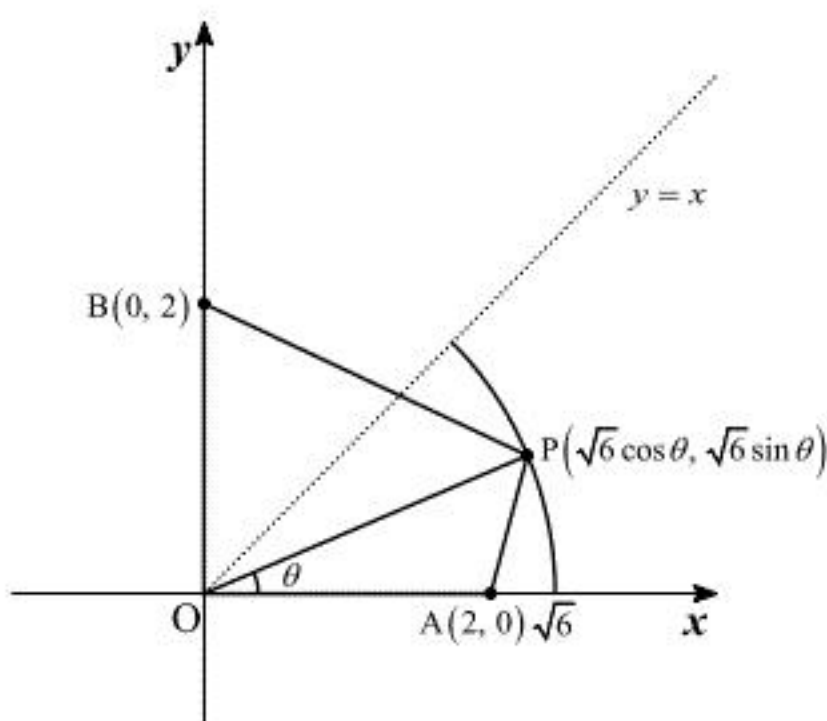
$$\overrightarrow{PB} = (-\sqrt{6}\cos\theta, 2 - \sqrt{6}\sin\theta)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PA} = (2 - \sqrt{6}\cos\theta, -\sqrt{6}\sin\theta), \overrightarrow{PB} = (-\sqrt{6}\cos\theta, 2 - \sqrt{6}\sin\theta)$$

(ii)

3点 A, B, P を xy 平面上に図示すると、以下のようになる。



上図より, $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OB}| = 2$, $\angle POB = \frac{\pi}{2} - \theta$ であるから, 求める面積を S_1 とおくと,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \cos\theta \\ &= \sqrt{6} \cos\theta \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{6} \cos\theta$$

(iii)

$\angle APB$ が直角のとき, $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ は垂直であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \sqrt{6}\cos\theta)(-\sqrt{6}\cos\theta) + (-\sqrt{6}\sin\theta)(2 - \sqrt{6}\sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{6}(\sin\theta + \cos\theta) + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta + \cos\theta &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(iv)

$\triangle OPA$ の面積を S_2 とおくと, (ii) と同様にして,

$$S_2 = \sqrt{6} \sin\theta$$

が得られる。よって, 四角形 $OAPB$ の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \sqrt{6}(\sin\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

である。ここで, $\angle APB$ が直角のとき, (iii) の結果から,

$$S = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3$$

(v)

$\angle APB$ が直角のとき,

$$\begin{aligned} \sin\theta + \cos\theta &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

が成立する。ここで, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{12}$$

Ⅲ.

(i)

$y = x^3 - 3x^2$ の導関数は、

$$y' = 3x^2 - 6x$$

である。ゆえに、 $A(a, a^3 - 3a^2)$ における C の接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 \\ &= (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2 \end{aligned}$$

である。同様に、 $B(-a, -a^3 - 3a^2)$ における C の接線 m の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 + 6a)(x + a) - a^3 - 3a^2 \\ &= (3a^2 + 6a)x + 2a^3 + 3a^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: y = (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2, \quad m: y = (3a^2 + 6a)x + 2a^3 + 3a^2$$

(ii)

接線 l, m の方程式を連立させると、 P の x 座標は、

$$\begin{aligned} (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2 &= (3a^2 + 6a)x + 2a^3 + 3a^2 \\ \Leftrightarrow a\left(x + \frac{a^2}{3}\right) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{a^2}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。また、 P の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 6a)\left(-\frac{a^2}{3}\right) - 2a^3 + 3a^2 \\ &= -a^4 + 3a^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P\left(-\frac{a^2}{3}, -a^4 + 3a^2\right)$$

(iii)

(ii)の結果より、 $f(a) = -a^4 + 3a^2$ とおき、 $f(a)$ の $a > 0$ の範囲における最大値を求めればよい。

このとき、

$$\begin{aligned} f'(a) &= -4a^3 + 6a \\ &= -4a\left(a + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(a - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$ の範囲で $f'(a) = 0$ を満たす a の値は、

$$a = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。したがって、 $a > 0$ の範囲における $f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	(0)	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$		↗	極大	↘

増減表より、 $f(a)$ は $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のときに最大となり、その値は、

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

である。以上より、 P の y 座標の $a > 0$ の範囲における最大値は、 $\frac{9}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{9}{4}$$

(iv)

C 上の点 $(t, t^3 - 3t^2)$ における接線の方程式は、(i)と同様に考えて、

$$y = (3t^2 - 6t)x - 2t^3 + 3t^2$$

である。これが $P\left(-\frac{a^2}{3}, -a^4 + 3a^2\right)$ を通るとすると、

$$\begin{aligned} -a^4 + 3a^2 &= (3t^2 - 6t)\left(-\frac{a^2}{3}\right) - 2t^3 + 3t^2 \\ \Leftrightarrow 2t^3 + (a^2 - 3)t^2 - 2a^2t - a^4 + 3a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(t^2 - a^2) + (a^2 - 3)(t^2 - a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + a)(t - a)(2t + a^2 - 3) &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 C の接線のうち P を通るものが l, m のみであるとき、 $\textcircled{1}$ の解が $t = \pm a$ のみとなる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{-a^2 + 3}{2} = a \text{ または } \frac{-a^2 + 3}{2} = -a \\ \Leftrightarrow (a + 3)(a - 1) = 0 \text{ または } (a + 1)(a - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow a = 1, 3 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

が求める a の値である。

$$(\text{答}) \quad a = 1, 3$$