

I.

〔解答〕

(i)	ア	
	26	
(ii)	イ	
	$\frac{2}{3}\pi$	
(iii)	ウ	
	1	
(iv)	エ	オ
	2	-4
(v)	カ	
	$a^2b^2c^2$	
(vi)	キ	
	$\frac{4}{15}$	
(vii)	ク	
	$\sqrt{3}$	
(viii)	ケ	
	$\frac{\sqrt{61}}{7}$	

〔解説〕

(i)

与式を展開すると、

$$\begin{aligned}(x-1)(x+3)(x^2+x+1)(x^2-3x+9) &= (x-1)(x^2+x+1)(x+3)(x^2-3x+9) \\ &= (x^3-1)(x^3+27) \\ &= x^6+26x^3-27\end{aligned}$$

となるから、式 $(x-1)(x+3)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$ の x^3 の項の係数は26である。

(ii)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned}\sin\theta\tan\theta &= -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} &= -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 1-\cos^2\theta &= -\frac{3}{2}\cos\theta \\ \Leftrightarrow (2\cos\theta+1)(\cos\theta-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= -\frac{1}{2} \quad (\because -1\leq\cos\theta\leq 1) \\ \therefore \theta &= \frac{2}{3}\pi \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)\end{aligned}$$

となる。

(iii)

$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ であるから、

$$|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6 & (x\leq 2, 3\leq x) \\ -(x^2-5x+6) & (2\leq x\leq 3) \end{cases}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\int_1^3|x^2-5x+6|dx &= \int_1^2(x^2-5x+6)dx - \int_2^3(x^2-5x+6)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 - \int_2^3(x-3)(x-2)dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3) - \frac{5}{2}\cdot(2^2-1^2) + 6\cdot(2-1) + \frac{1}{6}\cdot(3-2)^3 \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

(iv)

2直線 $x-y+2=0$, $2x+y-2=0$ の交点の x 座標は、2式から y を消去すると、

$$\begin{aligned}x+2 &= -2x+2 \\ \therefore x &= 0\end{aligned}$$

であるから、交点の座標は $(0, 2)$ である。点 $(2, 1)$ と点 $(0, 2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{1-2}{2-0}(x-0)+2 \\ \Leftrightarrow x+2y-4 &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $a=2$, $b=-4$ である。

(v)

まず、 $x=0$ とすると $a^{3x}=1$ となるから、 $a^{3x}=27$ を満たさず不適である。よって、 $x\neq 0$ であり、同様に $y\neq 0$, $z\neq 0$ となる。ここで、

$$\begin{aligned}a^{3x} &= 27 \Leftrightarrow a = 3^{\frac{1}{x}} \\ b^{3y} &= 27 \Leftrightarrow b = 3^{\frac{1}{y}} \\ c^{3z} &= 27 \Leftrightarrow c = 3^{\frac{1}{z}}\end{aligned}$$

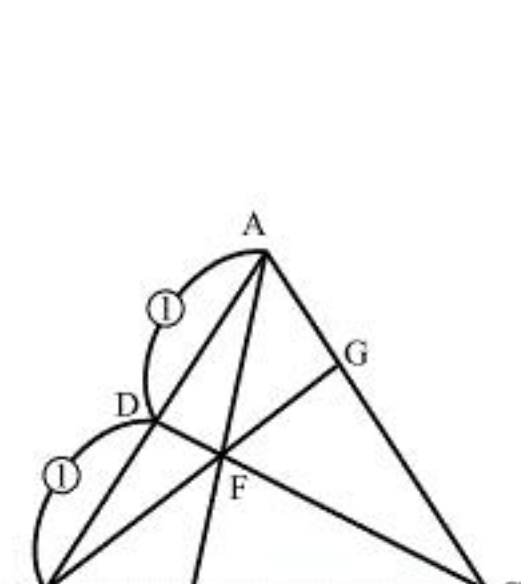
であるから、

$$\begin{aligned}9^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} &= 3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \\ &= \left(3^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{y}}\cdot 3^{\frac{1}{z}}\right)^3 \\ &= (abc)^3 \\ &= a^3b^3c^3\end{aligned}$$

となる。

(vi)

以下に、三角形ABCおよび点D, E, F, Gを図示する。



チェバの定理より

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CG}{GA} &= 1 \\ \therefore AG:GC &= 1:2\end{aligned}$$

である。また、三角形ABEと直線CDについてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{EF}{FA}\cdot\frac{1}{1} &= 1 \\ \therefore EF:FA &= 2:3\end{aligned}$$

である。よって、三角形ABCの面積を $\triangle ABC$ と表記すると、

$$\begin{aligned}\triangle CFG &= \frac{GC}{AG+GC}\triangle AFC \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{FA}{EF+FA}\triangle AEC \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{EC}{BE+EC}\triangle ABC \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \\ &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

である。

(vii)

与式を整理すると、

$$x^2+ax-6+(x-a)i=0$$

となる。ここで、複素数の相等より

$$「x^2+ax-6=0」かつ「x-a=0」$$

が成り立ち、 $x=a$ を $x^2+ax-6=0$ に代入すると、

$$\begin{aligned}a^2+a\cdot a-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 3 \\ \therefore a &= \sqrt{3} \quad (\because a>0)\end{aligned}$$

となる。

(viii)

$2\vec{p}+3\vec{q}$ を計算すると、

$$2\vec{p}+3\vec{q} = (4\vec{a}-6\vec{b}) + (3\vec{a}+6\vec{b}) = 7\vec{a}$$

となるから、 $\vec{a} = \frac{2}{7}\vec{p} + \frac{3}{7}\vec{q}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{\frac{4}{49}|\vec{p}|^2 + \frac{12}{49}\vec{p}\cdot\vec{q} + \frac{9}{49}|\vec{q}|^2} \\ &= \frac{1}{7}\sqrt{4\cdot 1^2 + 12\cdot (-2) + 9\cdot 3^2} \\ &= \frac{\sqrt{61}}{7}\end{aligned}$$

である。

II.

(i)

$y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから、 C 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: y = 2ax - a^2$$

(ii)

$a > 0$ より、 l に垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であるから、 $A(a, a^2)$ を通り l と垂直な直線 m の方程式は

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m: y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

(iii)

放物線 C と直線 m の共有点の x 座標は、2 式から y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - a) \left\{ x + \left(a + \frac{1}{2a} \right) \right\} &= 0 \\ \therefore x &= a, -\left(a + \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

である。よって、点 B の x 座標は $-\left(a + \frac{1}{2a} \right)$ であり、点 B は $y = x^2$ 上の点であるから、

$$B \left(-\left(a + \frac{1}{2a} \right), a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B \left(-\left(a + \frac{1}{2a} \right), a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1 \right)$$

(iv)

点 P の y 座標を y_p とすると、内分の公式より、

$$y_p = \frac{5}{9}a^2 + \frac{4}{9} \left(a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1 \right) = a^2 + \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{9}$$

となる。ここで、 $a^2 > 0$ 、 $\frac{1}{9a^2} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より

$$y_p = a^2 + \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{9} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{9a^2}} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$$

となる。また、等号成立条件は

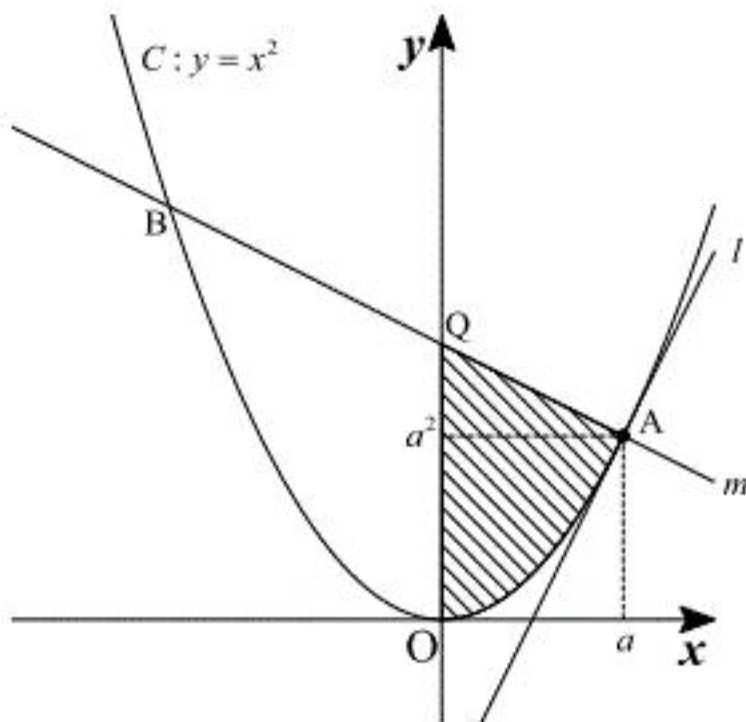
$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{9a^2} \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{9} \\ \therefore a &= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。以上より、点 P の y 座標は $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、最小値 $\frac{10}{9}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} : \frac{10}{9} \left(a = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(v)

以下に、放物線 C 、直線 l 、 m および線分 OQ 、 AQ と放物線 C で囲まれた図形を斜線部で示す。



上図より、 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4a}x^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right)x \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a + a^3 + \frac{1}{2}a \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \\ &= \frac{2}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{17}{36\sqrt{3}} \\ &= \frac{17\sqrt{3}}{108} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{17\sqrt{3}}{108}$$

Ⅲ.

(i)

さいころを1回投げるとき、目の出方は全部で6通りあり、これらは同様に確からしく起こる。さいころを1回投げて出た目と、その後のPの位置は以下の表のようになる。

はじめ	1回目の目	1回目後のP
A	4, 5, 6	A
	1	B
	2	C
	3	D

したがって、

$$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{6}, a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{6}, c_1 = \frac{1}{6}, a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$$

(ii)

さいころを2回投げてPがAにあるのは、出た目が以下の表のようになるときである。

はじめ	1回目の目	1回目後のP	2回目の目	2回目後のP
A	4, 5, 6	A	4, 5, 6	A
	1	B	3	
	2	C	2	
	3	D	1	

したがって、

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

となる。また、同様に考えて

$$b_2 = c_2 = d_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

であるから

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_2 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{9}, c_2 = \frac{2}{9}, a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

(iii)

さいころを3回投げてPがAにあるのは、確率が以下の表のようになるときである。

はじめ	2回目までの確率	2回目のP	3回目の確率	3回目後のP
A	a_2	A	$\frac{1}{2}$	A
	b_2	B	$\frac{1}{6}$	
	c_2	C	$\frac{1}{6}$	
	d_2	D	$\frac{1}{6}$	

したがって、(ii)の結果を用いると、

$$a_3 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + d_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{6}(1 - a_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

となる。また、同様に考えて

$$b_3 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + d_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{6}(1 - b_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{9} = \frac{13}{54}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_3 = \frac{5}{18}, b_3 = \frac{13}{54}$$

(iv)

さいころを $n+1$ 回投げてPがAにあるのは、確率が以下の表のようになるときである。

はじめ	n 回目までの確率	n 回目後のP	$n+1$ 回目の確率	$n+1$ 回目後のP
A	a_n	A	$\frac{1}{2}$	A
	b_n	B	$\frac{1}{6}$	
	c_n	C	$\frac{1}{6}$	
	d_n	D	$\frac{1}{6}$	

ここで、 n 回目後にはPはA, B, C, Dのいずれかにあるから

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

であることに注意する。よって、

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + b_n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + c_n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + d_n \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}$$

(v)

(iv)より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

が得られ、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 \right\}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 \right\}$$