

I

【解答】

(i)	ア	イ	ウ	
	3	−6	1	
(ii)	エ			
	$35-4\sqrt{6}$			
(iii)	オ	カ	キ	ク
	4	0	−3	0
(iv)	ケ			
	2			
(v)	コ			
	9			
(vi)	サ			
	$\frac{1}{6}$			
(vii)	シ			
	120			
(viii)	ス			
	8			

【解説】

(i)
放物線 $y=3x^2+6x+2$ を x 軸方向に 2、 y 軸軸方向に −1 だけ平行移動した放物線の方程式は
$$y+1=3(x-2)^2+6(x-2)+2$$
$$\Leftrightarrow y=3x^2-6x+1$$
となる。

(ii)
 $2<\sqrt{6}<3$ であることから、 $a=5, b=\sqrt{6}-2$ である。したがって a^2+b^2 は
$$a^2+b^2=5^2+(\sqrt{6}-2)^2$$
$$=35-4\sqrt{6}$$
となる。

(iii)
3 次式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $0\leq\theta<2\pi$ において常に $P(\cos\theta)=\cos 3\theta$ を満たすとき、これは θ についての恒等式である。
$$P(\cos\theta)=a\cos^3\theta+b\cos^2\theta+c\cos\theta+d$$
$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
であるから、
$$P(\cos\theta)=\cos 3\theta$$
$$\Leftrightarrow a\cos^3\theta+b\cos^2\theta+c\cos\theta+d=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
は恒等式であり、このことから $a=4, b=0, c=-3, d=0$ である。

(iv)
真数条件より、
$$3x-2>0$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$$
となる。また、
$$6x^2-9x+10>0$$
$$\Leftrightarrow 6\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{53}{8}>0$$
となり、これは全ての実数 x について成り立つ。与式より、
$$\log_4(3x-2)=\log_{16}(6x^2-9x+10)$$
$$\Leftrightarrow \log_{16}(3x-2)^2=\log_{16}(6x^2-9x+10)$$
$$\Leftrightarrow (3x-2)^2=6x^2-9x+10$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-3x-6=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=2, -1$$
であり、このうち真数条件を満たすのは $x=2$ のみである。

(v)
12 本のくじから同時に 2 本のくじを引く場合の数は ${}_{12}\text{C}_2$ (通り) であり、これらは同様に確からしく起こる。当たりくじが n 本 (n は $0\leq n\leq 12$ を満たす整数) であるとする、2 本とも当たりくじである確率は、
$$\frac{{}_n\text{C}_2}{{}_{12}\text{C}_2}=\frac{n(n-1)}{12\cdot 11}$$
である。これが $\frac{6}{11}$ であることから、
$$\frac{n(n-1)}{12\cdot 11}=\frac{6}{11}$$
$$\Leftrightarrow n^2-n=72$$
$$\Leftrightarrow (n+8)(n-9)=0$$
$$\Leftrightarrow n=-8, 9$$

となる。 $0\leq n\leq 12$ であるから、 $n=9$ である。

(vi)
関数 $f(x)$ の増減を考える。
$$f'(x)=x^2+x$$
$$=x(x+1)$$
となることから、増減表は以下のようになる。

x	...	−1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、極大値と極小値の差は
$$f(-1)-f(0)=\int_0^{-1}(t^2+t)dt-\int_0^0(t^2+t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{-1}$$
$$=-\frac{1}{6}$$
となる。

(vii)
3 点 A(2, 3, 5)、B(0, 4, 4)、C(3, 4, 7) に対して、
$$\overline{AB}=(0-2, 4-3, 4-5)$$
$$=(-2, 1, -1)$$
$$\overline{AC}=(3-2, 4-3, 7-5)$$
$$=(1, 1, 2)$$
である。また、
$$|\overline{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}$$
$$=\sqrt{6}$$
$$|\overline{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}$$
$$=\sqrt{6}$$
であり、
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(-2)\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 2$$
$$=-3$$
であることから、 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\cos\theta$ であることを利用すると、
$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos\theta=-3$$
$$\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\theta=120^\circ\quad(\because 0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ)$$
となる。

(viii)
4 個の値 $5, n+3, n-1, 2n+1$ について、平均は
$$\frac{5+(n+3)+(n-1)+(2n+1)}{4}=\frac{4n+8}{4}$$
$$=n+2$$
となる。よって標準偏差は、
$$\sqrt{\frac{\{5-(n+2)\}^2+\{(n+3)-(n+2)\}^2+\{(n-1)-(n+2)\}^2+\{(2n+1)-(n+2)\}^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(3-n)^2+1^2+(-3)^2+(n-1)^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{2n^2-8n+20}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{n^2-4n+10}{2}}$$
となる。これが $\sqrt{21}$ であることから、
$$\sqrt{\frac{n^2-4n+10}{2}}=\sqrt{21}$$
$$\Leftrightarrow n^2-4n+10=42$$
$$\Leftrightarrow (n-8)\cdot(n+4)=0$$
$$\Leftrightarrow n=8, -4$$
となる。 n は自然数であるから、 $n=8$ である。

II

(i)

直線OBの方程式は $y=2x$ であり、直線QRの方程式は $y=-2\{x-(t+1)\}$ である。よって交点

Tの x 座標は、

$$\begin{aligned} 2x &= -2\{x-(t+1)\} \\ \Leftrightarrow 4x &= 2(t+1) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t+1}{2} \end{aligned}$$

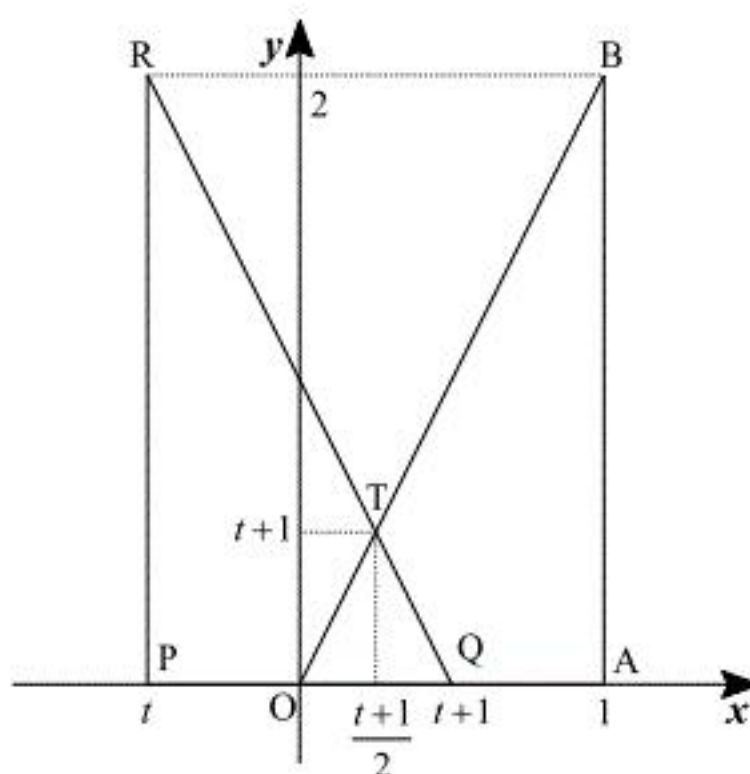
であり、このとき y 座標は

$$2 \cdot \frac{t+1}{2} = t+1$$

である。したがって点Tの座標は $\left(\frac{t+1}{2}, t+1\right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{t+1}{2}, t+1\right)$$

(ii)



領域 D, E に共通する部分が三角形である条件は、点Qが線分OA上に存在することである。

よって

$$\begin{aligned} 0 &\leq t+1 \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< t \leq 0 \quad (\because -1 < t < 1) \end{aligned}$$

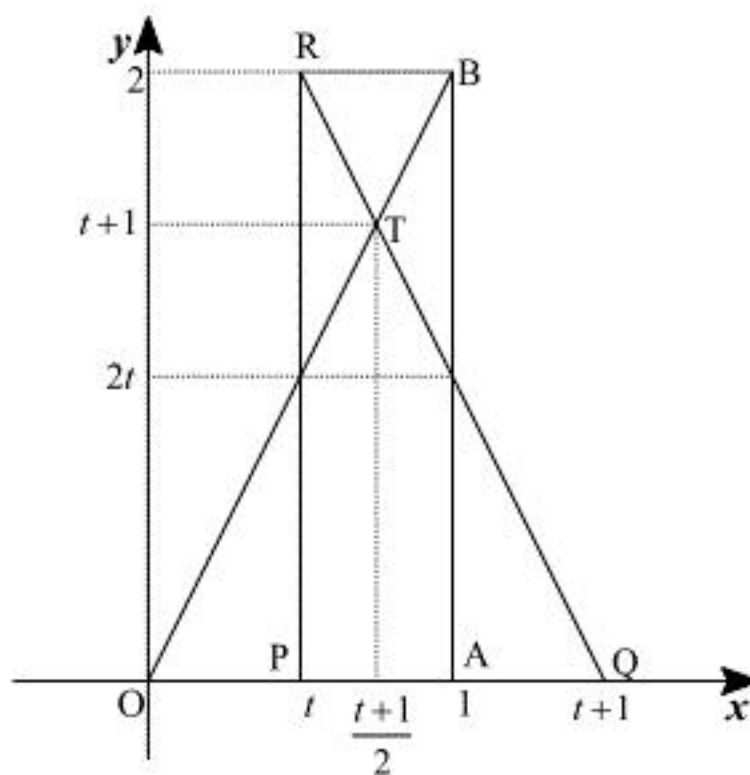
のとき、領域 D, E に共通する部分が三角形である。この三角形は底辺の長さが $t+1$ であり高さが(i)より $t+1$ であるから、面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot (t+1) \cdot (t+1) = \frac{(t+1)^2}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) -1 < t \leq 0, \quad S(t) = \frac{(t+1)^2}{2}$$

(iii)



領域 D, E に共通する部分が三角形とならないとき、

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{2} &< 1 < t+1 \\ \Leftrightarrow 0 &< t < 1 \end{aligned}$$

である。このとき $S(t)$ は上図より、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{(t+1)^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot t \\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) 0 < t < 1, \quad S(t) = -\frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

(iv)

(ii)より、 $-1 < t \leq 0$ のとき $S(t) = \frac{(t+1)^2}{2}$ であるから

$$S'(t) = t+1$$

となる。また、(iii)より $0 < t < 1$ のとき $S(t) = -\frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ であるから

$$S'(t) = -3t+1$$

となる。よって増減表は次のようになる。

t	-1	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$S'(t)$	/	+		+	0	-	/
$S(t)$	/	↗		↗	極大	↘	/

増減表より、最大値は $t = \frac{1}{3}$ のときに取り、そのときの $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) t = \frac{1}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{2}{3}$$

Ⅲ

(i)

自然数 k について、第 k 群には k 個の項が存在するので、第 1 群から第 m 群までに含まれる項の総数は

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{m(m+1)}{2} \text{ 個}$$

(ii)

自然数 k, l ($1 \leq l \leq k$) について、第 k 群の l 番目の項は $\frac{2l+1}{k}$ である。したがって、第 m 群に

含まれる項の和 A_m は

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{l=1}^m \frac{2l+1}{m} \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \frac{2m(m+1)}{2} + m \right\} \\ &= m+2 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad A_m = m+2$$

(iii)

(ii)より、第 k 群の総和 A_k は $k+2$ であるから、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (k+2) &= \frac{m(m+1)}{2} + 2m \\ &= \frac{m(m+5)}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{m(m+5)}{2}$$

(iv)

第 40 項が第 m 群に含まれているとすると、(i)より

$$\frac{(m-1)m}{2} < 40 \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

であり、これを満たす m は $m=9$ である。したがって第 40 項は第 9 群に存在する。また、第 1 群から第 8 群までの項の総数は(i)より

$$\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

であることから、

$$40 - 36 = 4$$

より、第 40 項は第 9 群の 4 番目の項である。したがって求める S_{40} は

$$\begin{aligned} S_{40} &= \frac{8 \cdot (8+5)}{2} + \sum_{l=1}^4 \frac{2l+1}{9} \\ &= 52 + \frac{1}{9}(4 \cdot 5 + 4) \\ &= \frac{164}{3} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \text{第 9 群, } S_{40} = \frac{164}{3}$$

(v)

(iii)より $A_1 + A_2 + \cdots + A_m = \frac{m(m+5)}{2}$ であり

$$\frac{m(m+5)}{2} \leq 50$$

を満たすような自然数 m は $m \leq 7$ である。したがって $S_n \leq 50$ であるとき第 n 項は第 8 群以下の群に含まれる。(i)より、第 8 群までの項の総数は

$$\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

であり、このとき S_{36} は

$$\begin{aligned} S_{36} &= \frac{8 \cdot (8+5)}{2} \\ &= 52 \end{aligned}$$

である。第 8 群の最終項は $\frac{17}{8}$ であるから、

$$\begin{aligned} S_{35} &= 52 - \frac{17}{8} \\ &= \frac{399}{8} \\ &< 50 \end{aligned}$$

である。したがって、 $S_{35} < 50 < S_{36}$ であるため、求める自然数 n は $n=35$ である。

$$\text{(答)} \quad n = 35$$